PROMETHEUS
94 11 037

ISBN 80-85849-63-1

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY pro ZŠ

BĚLOUN

PROMETHEUS

František BĚLOUN a kolektiv

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY pro základní školu

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY pro základní školu

PROMETHEUS

PŘEDMLUVA

Sbírka úloh z učiva matematiky základní školy je určena k opakování a procvičení učiva matematiky základní školy, k přípravě ke studiu na střední škole a k přípravě na přijímací zkoušky z matematiky na střední školy.

Šesté vydání bylo přepracováno v souladu s učebními osnovami matematiky pro ZŠ, které schválilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR dne 11. 6. 1991, č.j. 18730/91-20, s platností od 1. 9. 1991.

Sbírka úloh je členěna podle tematických okruhů do 14 kapitol a obsahuje učivo 5. až 8. ročníku ZŠ. V každé kapitole jsou řešené příklady, které mají názorně ukázat postup, úplnost a vhodné formy zápisu řešení úloh. V některých příkladech je předvedeno i několik způsobů řešení. Stačí, když žák umí vyřešit úlohu jedním z uvedených způsobů. Vedle řešených příkladů je ve Sbírce řada úloh, které slouží k procvičení učiva. Některé úlohy svým zadáním navazují na řešené příklady, další jsou voleny tak, aby učivo procvičily v celém rozsahu a v různých souvislostech. Obtížnější úlohy jsou označeny hvězdičkou. Úlohy z učiva, které je v osnovách uvedeno jako volné náměty k doplnění obsahu, a úlohy z učiva posledních dvou tematických celků 8. ročníku výše uvedených učebních osnov jsou označeny čtverečkem. Tyto úlohy nemají být předmětem přijímací zkoušky.

V poslední části publikace jsou uvedeny výsledky úloh, které umožňují kontrolu správnosti řešení. Mnohé výsledky jsou zaokrouhleny a může se stát, že vaše řešení se bude od uvedeného výsledku poněkud lišit. Tato odlišnost může být způsobena tím, zda při výpočtu použijete Tabulky pro základní školu nebo počítačku, zda při výpočtu na počítačce použijete číslo π nebo přibližnou hodnotu 3,14 apod.

Při práci se Sbírkou můžete řešit vybrané úlohy ve sledu kapitol nebo řešit vybrané úlohy bez ohledu na řazení kapitol. Druhý způsob pokládáme pro vás za vhodnější, protože s ním můžete začít již v 5. ročníku. Ve Sbírce je dostatek úloh, které jste schopni v té době řešit již samostatně.

Skladba a množství úloh ve Sbírce vám poskytne možnost individuálního výběru úloh z té části učiva, kterou si potřebujete procvičit. Vyřešení většího počtu úloh z každé kapitoly vám poskytne určitou záruku dobré, neformální a systematické přípravy pro další studium na střední škole, a tedy i k úspěšnému vykonání přijímací zkoušky z matematiky.

Autoři

OBSAH

1 RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Příklad 1

Vypočítejte:

$$14-(-3)^2+5{,}6:(-0{,}7)-\left[\sqrt{\frac{1}{9}}:\left(-\frac{1}{3}\right)-(4{,}8-2{,}9)\right]$$

Řešení

$$14-(-3)^2+5{,}6:(-0{,}7)-\left[\sqrt{\frac{1}{9}}:\left(-\frac{1}{3}\right)-(4{,}8-2{,}9)\right]=$$

$$=14-9+(-8)-\left[\frac{1}{3}\cdot(-3)-1{,}9\right]=14-9-8-[-1-1{,}9]=$$

$$=-3-[-2{,}9]=-3+2{,}9=-0{,}1$$

Úlohy

1. Vypočítejte:
a) $23-\left[2{,}6+(6-3^2)-4{,}52\right]$
b) $3{,}5^2+2\cdot\left[2{,}7-(-0{,}5+0{,}3\cdot 0{,}6)\right]$
c) $(-2+3)^2-(-2)^2\cdot\left[1{,}27-(2{,}3-0{,}8)\right]$
d) $85+(-0{,}5)^2+\left[72-(35-17)^2\right]$

2. Vypočítejte:
a) $25:(-5)-3:0{,}5+\sqrt{0{,}04}\cdot\sqrt{0{,}49}$
b) $4{,}29:0{,}3+\left[(-4)^2:(-4)\right]\cdot 2$
c) $(125:12{,}5)^2-\left[(-0{,}4)\cdot 0{,}02:0{,}1\right]$
d) $(-7{,}9):79+0{,}5^2:0{,}025-\sqrt{0{,}64}\cdot 3$

3. Vypočítejte:
a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)$
b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)$
c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$
d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$

4. Vypočítejte:

a) $\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{6}\right)$ b) $\frac{1}{3}-\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{6}\right)$

c) $\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

5. Vypočítejte:

a) $\frac{1}{4}-\left[\frac{2}{6}-2\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

b) $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\frac{3}{9}-\sqrt{\frac{64}{81}}$

c) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}3-\left(-1{,}4+\frac{2}{5}\right)^2$

d) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{(-6)}-\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{36}}\cdot 3\right]$

6. Vypočítejte:

a) $7{,}5+2\frac{1}{2}\cdot\left(1\frac{2}{3}:2{,}5-3\right)$

b) $1{,}2\cdot 0{,}5-0{,}4^2:\frac{2}{25}+0{,}3$

c) $1{,}2:0{,}8+\frac{4}{9}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)^2-0{,}4\cdot 0{,}8$

d) $\frac{5}{6}\cdot\sqrt{1{,}44}-1\frac{1}{3}:\frac{5}{6}$

7. Vypočítejte:

a) $\left(2\frac{1}{3}-2{,}5\right):\frac{5}{6}+(1{,}2)^2$

b) $4{,}4:0{,}4-\sqrt{12{,}25}\cdot 2{,}6-1{,}9$

c) $\left(\frac{8}{15}-1\frac{7}{10}+\frac{1}{6}\right)\cdot 0{,}3+1{,}5$

d) $\left(\sqrt{0{,}74}:\frac{2}{7}-0{,}61\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)$

8. Vypočítejte:

a) $\left[0{,}7:(-0{,}2)^2\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $\left[-1\frac{1}{2}-\left(-1\frac{7}{8}\right)\right]:0{,}2$

c) $\left(\frac{\sqrt{2{,}5}}{0{,}3}+0{,}13\right)\cdot(-6)$

d) $\left[-2\cdot(-3{,}75)-8\frac{3}{4}\right]^2\cdot 100$

□ **9.** Vypočítejte:

a) $(-2+5)^2-(-2)^3\cdot\sqrt{0{,}04}\cdot\sqrt{25}$

b) $3{,}2:320+0{,}5^3\cdot 10-\left[3-(0{,}2\cdot 0{,}4)\right]$

c) $\frac{4}{7}\cdot\sqrt{1{,}96}+0{,}6^3:0{,}036-\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)$

d) $1{,}5^3+0{,}08:0{,}2-\left[(-3)^3:(-3)\right]$

10. Vypočítejte:

a) $\dfrac{\frac{2}{7}-\frac{1}{2}}{3-\frac{3}{4}}$ b) $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}-\frac{4}{15}}$

c) $\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{5}}$ d) $\dfrac{1-\frac{5}{6}}{1-\frac{6}{5}}$

11. Vypočítejte:

a) $\dfrac{2\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{2\cdot\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+0{,}2}$ b) $\dfrac{\frac{2}{3}-\left(-2\frac{4}{5}\right)}{\frac{1}{3}:\frac{5}{13}}$

c) $\dfrac{\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6}\right)}{1\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}$ d) $\dfrac{\frac{1}{5} - \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{2}{5} : \left(-\frac{1}{3}\right)}$

Příklad 2

Vypočítejte:

$$\frac{\left(\frac{3}{8} - 1{,}475\right) \cdot \sqrt{269}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 : 0{,}4}$$

Řešení

$$\frac{\left(\frac{3}{8} - 1{,}475\right) \cdot \sqrt{269}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 : 0{,}4} \doteq \frac{(0{,}375 - 1{,}475) \cdot 16{,}4}{\frac{4}{9} : \frac{4}{10}} =$$

$$= \frac{-1{,}1 \cdot 16{,}4}{\frac{4}{9} \cdot \frac{10}{4}} = \frac{-18{,}04}{\frac{10}{9}} = \frac{-18{,}04 \cdot 9}{10} = -16{,}236$$

Úlohy

* **12.** Vypočítejte:

a) $\dfrac{\frac{2}{5} \cdot 0{,}5 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 : \frac{3}{8}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)}$ b) $\dfrac{\left(\frac{3}{7} - 1\frac{1}{2}\right) : \frac{3}{8}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)}$

c) $\dfrac{\left[\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\right] : \left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 0{,}7 \cdot \frac{2}{3}}$ d) $\dfrac{\frac{1}{6} \cdot 0{,}1 + \frac{3}{5} : \left(-\frac{12}{7}\right)}{\frac{3}{7} \cdot \sqrt{2{,}25}}$

Příklad 3

Vyjádřete objem 47,2 l v cm^3 a zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je přirozené číslo, $1 \leqq a < 10$.

Řešení

$47{,}2\,l = 47{,}2\,dm^3 = 47{,}2 \cdot 10^3\,cm^3 = 4{,}72 \cdot 10^4\,cm^3$

□ **Příklad 4**

Vyjádřete hmotnost $47{,}2 \cdot 10^{-2}$ g v kilogramech a zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo, $1 \leqq a < 10$.

Řešení

$$47{,}2 \cdot 10^{-2}\,g = 47{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3}\,kg = 47{,}2 \cdot 10^{-5}\,kg =$$
$$= 4{,}72 \cdot 10 \cdot 10^{-5}\,kg = 4{,}72 \cdot 10^{-4}\,kg$$

Úlohy

13. Zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je přirozené číslo, $1 \leqq a < 10$:

a) 450 000 b) 685,92
c) $7\,985 \cdot 10^2$ d) 300 000 000

14. Vyjádřete v jednotkách uvedených v závorce:

a) 4 g (kg); 325 km (m)
b) 12 kg (g); 37,5 mm (m)
c) 12 t (kg); 35 l (dm^3)
d) 820 mm^2 (m^2); 34,1 kJ (J)

15. Vyjádřete v jednotkách uvedených v závorce:

a) $0{,}75 \cdot 10^3$ mm (m); $31{,}25 \cdot 10^4$ kg (t)
b) $0{,}27 \cdot 10^5$ m (km); $74{,}4 \cdot 10^2$ s (min)
c) $6{,}48 \cdot 10^5$ mm^2 (m^2); $20{,}845 \cdot 10^2$ g (kg)
d) $65{,}4 \cdot 10^4$ g (kg); $0{,}0825 \cdot 10^6$ l (m^3)

16. Vyjádřete v jednotkách uvedených v závorce a zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je přirozené číslo, $1 \leqq a < 10$:

a) $327 \cdot 10^3$ mm (m);	1 h 15 min (s);	25,8 V (mV)
b) 2 min (s);	$732 \cdot 10^2$ MPa (Pa);	0,1 kg (g)
c) 65,4 MW (W);	$13{,}6\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ $\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$;	12,5 l (cm^3)
d) $55 \cdot 10^7$ ml (m^3);	$27{,}3 \cdot 10^3$ kJ (J);	38,2 t (kg)

□ **17.** Zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo, $1 \leqq a < 10$:

a) 0,01	b) 0,25
c) 0,003 85	d) 0,000 000 293

□ **18.** Vyjádřete v jednotkách uvedených v závorce a zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo, $1 \leqq a < 10$:

a) 23 g (kg);	4,5 dm^2 (m^2);	0,2 ml (l)
b) $2{,}7 \cdot 10^{-2}$ mm (m);	$65\frac{1}{2}$ l (m^3);	13,7 mV (V)
c) 34 m (km);	$50 \cdot 10^{-5}$ kg (g);	78,4 cm^3 (m^3)
d) 64 mg (kg);	0,48 dm (m);	59 mA (A)

□ **19.** Vyjádřete v jednotkách uvedených v závorce a zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo, $10 \leqq a < 100$:

a) 127 m (km);	$\frac{1}{1000}$ g (kg);	2,57 cm^2 (m^2)
b) $5{,}4 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$;	2,5 h (s);	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$ kN (N)
c) 320 mm (m);	$\frac{1}{2}$ l (m^3);	$7{,}4\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ $\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$
d) 157 t (kg);	$\frac{2}{100}$ mm (m);	$0{,}3 \cdot 10^{-2}$ mV (V)

Příklad 5

Od práce $W_1 = 69$ kJ odečtěte práci, kterou vykoná stálá síla F velikosti 5 N působící po přímočaré trajektorii délky 5 km. Síla působí ve směru pohybu tělesa. Výsledek vyjádřete v jednotkách joule a zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je přirozené číslo, $1 \leqq a < 10$.

Řešení

Práce W je rozdílem dané práce W_1 a práce W_2, kterou koná síla F. Máme ji vyjádřit v jednotkách J. Číselnou hodnotu veličiny práce W_1, která je uvedena v jednotce kJ, vyjádříme v jednotce J. Do fyzikálního vztahu pro výpočet práce W_2 budeme dosazovat takové číselné hodnoty fyzikálních veličin, aby vypočítaná veličina byla vyjádřena v jednotkách J.

$W_1 = 69\,\mathrm{kJ} = 69 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$
$F = 5\,\mathrm{N}$
$s = 5\,\mathrm{km} = 5 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$
$W_2 = F \cdot s$
$W = W_1 - W_2$
$W = \ldots\,\mathrm{J}$

$W_2 = 5\,\mathrm{N} \cdot 5 \cdot 10^3\,\mathrm{m} = 25 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$
$W = 69 \cdot 10^3\,\mathrm{J} - 25 \cdot 10^3\,\mathrm{J} = 44 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$
Výsledek zapíšeme v požadovaném tvaru:
$W = 4{,}4 \cdot 10^4\,\mathrm{J}$

Práce $W = 4{,}4 \cdot 10^4$ J.

Úlohy

20. Vypočítejte a vyjádřete v jednotkách uvedených v závorce:

a) 1,5 km : 25 (m)	36,5 g · 240 (kg)
b) 2 h 17,5 min : 110 (s)	$25\,\mathrm{cm}^3 \cdot 34 \cdot 10^4$ (m^3)
c) 303,8 hl : 245 (l)	15 s · 125 (min)

21. Vypočítejte, výsledek vyjádřete v jednotkách uvedených v závorce a zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je přirozené číslo, $1 \leqq a < 10$:

a) součet 2,5 kN a 50 N násobte číslem 20 (N)
b) zmenšete 7 km o 160 m a výsledek dělte číslem 2 (m)
c) od dvou pětin součtu 155 t a 125 kg odečtěte 2,05 t (kg)

□ **22.** Určete hmotnost soustavy dvou těles, má-li jedno těleso hmotnost 76 g a hmotnost druhého tělesa je určena jeho hustotou $\varrho = 8{,}9\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ a objemem $V = 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$. Výsledek vyjádřete v jednotkách kg a zapište ve tvaru $a\cdot 10^n$, kde n je celé číslo, $1 \leqq a < 10$.

* **23.** Od tlaku 27 kPa odečtěte tlak, který vyvolá tlaková síla 15 N působící kolmo na plochu o obsahu 50 cm^2. Výsledek vyjádřete v jednotkách Pa a zapište ve tvaru $a\cdot 10^n$, kde n je přirozené číslo, $1 \leqq a < 10$.

24. K daným číslům určete čísla opačná:

a) $2;\ -[-(1{,}5)]$ b) $-\frac{3}{5};\ -(-4)$

c) $-(-0{,}7);\ 3$ d) $-2\frac{1}{2};\ -\left(-\frac{3}{4}\right)$

Daná i opačná čísla znázorněte na číselné ose.

25. Z daných čísel vyberte všechny dvojice navzájem opačných čísel. Příslušné dvojice vhodně zapište.

a) $\frac{6}{7};\ -0{,}02;\ 4{,}5;\ -\frac{8}{9};\ -0{,}9;\ -\frac{27}{8};\ \frac{1}{50};\ -\frac{90}{20}$

b) $\frac{4}{25};\ 3\frac{1}{3};\ -\frac{29}{12};\ \frac{7}{3};\ -0{,}16;\ \frac{27}{12};\ -\frac{35}{15};\ -2{,}25$

26. Z daných čísel vyberte všechny dvojice navzájem opačných celých čísel. Příslušné dvojice vhodně zapište.

a) $3;\ -\frac{48}{12};\ -3{,}9;\ \frac{7}{3};\ 3{,}9;\ -30;\ \frac{16}{4};\ -\frac{14}{6};\ -\frac{27}{9}$

b) $24;\ -\frac{2}{3};\ -\frac{18}{3};\ 25;\ -24;\ 0;\ \frac{2}{3};\ 6;\ -26$

27. Z daných čísel vyberte všechny dvojice navzájem opačných celých lichých čísel. Příslušné dvojice vhodně zapište.

a) $\frac{7}{5};\ \frac{36}{12};\ 24;\ 0;\ -\frac{7}{5};\ 71;\ -24;\ 5;\ -\frac{72}{24};\ 73;\ -\frac{15}{3}$

b) $\frac{15}{3};\ 9;\ -17;\ -\frac{30}{6};\ 23{,}7;\ 19;\ -\frac{19}{2};\ -23{,}7;\ 17;\ -\frac{18}{2}$

28. Vypočítejte a výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa:

a) $1{,}5\cdot 2{,}2\cdot 0{,}02$ b) $11{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}33$
c) $23\cdot 55\cdot 3{,}5\cdot 0{,}001$ d) $101\cdot 77\cdot 3{,}3\cdot 0{,}0001$

29. Vypočítejte a výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo:

a) $\frac{12{,}7\cdot 1{,}2}{0{,}09}$ b) $\frac{2{,}52\cdot 2{,}44}{0{,}3}$

c) $\frac{3{,}3\cdot 0{,}02}{0{,}05}$ d) $\frac{753\cdot 0{,}22}{0{,}4}$

30. Zapište v jednotkách uvedených v závorce a potom zaokrouhlete na jedno desetinné místo:

a) 3 km 27 m 56 cm (m) b) 7 kg 54 g 750 mg (g)
c) 2 h 36 min 15 s (min) d) 36 m^2 127 cm^2 (m^2)

31. Zapište v jednotkách uvedených v závorce a potom zaokrouhlete na dvě desetinná místa:

a) 4 m 6 cm 7 mm (m) b) 105 hl 27 l 65 ml (l)
c) 5 m^3 6 724 cm^3 (m^3) d) 2 t 28 kg (t)

32. Zapište v jednotkách uvedených v závorce a potom zaokrouhlete na stovky:

a) 75 t 345 kg (kg) b) 1 h 54 min 32 s (s)
c) 2 m^2 455 cm^2 75 mm^2 (cm^2) d) 7 m^3 367 dm^3 (l)

33. Nové potrubí na přívod vody má být dlouhé 1,2 km. Je pokládáno z obou stran. Z jedné strany je položeno 0,492 km potrubí, z druhé strany 535 m potrubí. Kolik metrů potrubí zbývá ještě položit?

34. Ze sudu ovocné šťávy se naplní 306 lahví o objemu 0,7 l. Kolik lahví o objemu 0,3 l by se naplnilo z téhož množství šťávy?

35. Farmář sklidil z 18,3 ha 78,69 t pšenice. Jaký byl průměrný hektarový výnos pšenice?

36. Z balíku látky ušijí v dílně 40 dětských šatiček. Na každé šatičky se spotřebuje $1\frac{1}{5}$ m látky o šířce 0,7 m. Kolik halenek by ušili ze stejného balíku látky, je-li na ušití jedné halenky třeba $\frac{3}{4}$ m látky?

37. Do závodní jídelny dodali z masného závodu 8,2 kg vepřového masa v ceně 115 Kč za jeden kilogram, 11,4 kg hovězího masa v ceně 109 Kč za jeden kilogram a 7,8 kg salámu v ceně 119 Kč za jeden kilogram. Kolik Kč účtoval masný závod jídelně?

38. Maminka koupila chlapcům stejnou látku na šaty. Nejstaršímu Pepíkovi koupila 2,5 m látky, Karlovi 1,25 m a Lojzíkovi o 0,3 m látky více než Karlovi.

a) Kolik metrů látky koupila maminka celkem?
b) Kolik Kč zaplatila za látku, jestliže 1 m látky stál 138 Kč?

39. Anička jela na jarní prázdniny k babičce. Za cestu zaplatila 38 Kč, což byly $\frac{2}{9}$ jejích úspor. Babičce koupila dárek za 35,50 Kč a sestřence Míle koupila knížku za 16,70 Kč. Kolik korun jí zbylo na útratu, jestliže si ještě odložila peníze na zpáteční cestu?

40. Čerpadlo dodává 0,75 hl vody za jednu minutu. Za jak dlouho se naplní nádrž o objemu $10\frac{1}{5}\,\mathrm{m}^3$? Výsledek udejte v hodinách a minutách.

41. Jeřáb popojede v montážní hale za $1\frac{2}{5}$ minuty o 33,6 m. Jakou rychlostí se pohybuje, je-li jeho pohyb rovnoměrný přímočarý? Výsledek udejte v jednotce $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

42. Od 6 do 24 hodin byly vždy po třech hodinách naměřeny tyto teploty: −2,2 °C, 2,1 °C, 5,4 °C, 3,9 °C, 0,7 °C, −1,9 °C, −3,8 °C. Vypočítejte průměrnou teplotu v době od 6 do 24 hodin.

43. Průměr denních teplot měřených v jednom týdnu každý den v tutéž hodinu činil −2,8 °C. Všechny naměřené teploty byly od sebe navzájem různé. Nejvyšší naměřená teplota byla 2,4 °C, nejnižší −6 °C. Stanovte jednu z možností, které teploty mohly být naměřeny ve zbývajících pěti dnech.

44. Hotovost v pokladně činila 278,50 Kč. Během dne pokladník přijal 128,40 Kč, potom vydal 38,60 Kč, dvakrát 93 Kč a přijal 27 Kč. O kolik Kč se zvětšila nebo zmenšila hotovost v pokladně?

45. Zapište a vypočítejte:

a) součin součtu a rozdílu čísel −2,3 a 4,7,
b) rozdíl podílu čísel 3 a 5 a podílu čísel k nim opačných,
c) rozdíl podílu čísel 2 a 7 a podílu čísel k nim převrácených.

* **46.** Zapište a vypočítejte:

a) od součtu čísel 7,8 a 3,2 odečtěte číslo opačné k jejich rozdílu,
b) k rozdílu čísel 2 a −6 přičtěte číslo opačné k jejich součtu,
c) od rozdílu čísel −3 a −7,4 odečtěte číslo opačné k jejich součtu.

* **47.** Zapište a vypočítejte:

a) od součtu čísel 3 a 10 odečtěte číslo převrácené k jejich rozdílu,
b) k rozdílu převrácených čísel k číslům 2 a 3 přičtěte součin převrácených čísel k číslům 1 a 5.

2 DĚLITELNOST PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Úlohy

1. Zapište všechna přirozená čísla x, která jsou násobkem čísla 3 a zároveň pro ně platí $105 \leqq x < 126$.
2. Doplňte vynechanou číslici tak, aby vzniklo číslo, které je dělitelné třemi. Uveďte všechny možnosti.
   a) 12□ b) 3□2 c) □27 d) 3□43.
3. Zapište všechna přirozená čísla m, která jsou násobkem čísla 7 a zároveň pro ně platí $126 < m < 154$.
4. □ Najděte všechna přirozená čísla z, která jsou dělitelná čtyřmi a zároveň pro ně platí $116 < z \leqq 132$.
5. □ Doplňte vynechanou číslici tak, aby vzniklo číslo, které je dělitelné čtyřmi. Je-li více možností, zapište všechny.
   a) 2□4 b) 13□ c) 1□3 d) 58□2
6. □ Najděte chybějící číslici tak, aby vzniklé číslo bylo násobkem čísla devět. Je-li více možností, uveďte všechny.
   a) 24□ b) 1□8 c) 3□0 d) □21
7. □ Doplňte chybějící číslici tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné šesti. Uveďte všechny možnosti.
   a) 24□ b) 7□3 c) □50 d) 37□

Příklad 1

Rozložte číslo 132 na součin prvočísel a rozhodněte, zda je dělitelné šesti.

Řešení

$132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$

Je-li dané číslo dělitelné dvěma nebo více čísly, je dělitelné i jejich libovolným součinem. Číslo 132 je dělitelné dvěma i třemi, proto je dělitelné i součinem těchto dvou čísel, tj. je dělitelné šesti.

Číslo 132 je dělitelné šesti.

Úlohy

8. Rozložte čísla na součin prvočísel: a) 180; b) 240; c) 460; d) 232.
9. Určete všechny přirozené dělitele čísla: a) 96; b) 150; c) 63; d) 236.
10. Určete všechny společné přirozené dělitele čísel:
    a) 24 a 14 b) 36 a 40
    c) 21 a 16 d) 54, 18 a 36.
11. Vypočítejte součet a součin všech prvočísel větších než 10 a zároveň menších než 20.
12. Od čísla 100 odečtěte součet všech prvočísel x, pro která platí $10 < x < 20$. Určete všechny přirozené dělitele takto získaného rozdílu.
13. Zapište součet všech prvočísel větších než 20 a zároveň menších než 30. Určete všechny přirozené dělitele takto získaného součtu.
14. Která z čísel od 1 do 10 nejsou děliteli čísla 2 460?
15. Která z čísel od 1 do 10 jsou děliteli čísla 2 464?
16. Pro která přirozená čísla x je zlomek $\frac{24}{x}$ celé číslo?

Příklad 2

Čtyři autobusy vyjíždějí na různé linky ze stejné stanice ve stejnou dobu. První se do této stanice vrací za 2 hodiny, druhý za 1,5 hodiny, třetí za 45 minut a čtvrtý za $\frac{1}{2}$ hodiny. Za kolik hodin nejdříve se opět všechny setkají v této stanici?

Řešení

Musíme najít nejmenší společný násobek daných čísel (časových údajů).
Časové údaje jednotlivých linek si nejprve převedeme na minuty.

1. autobus .... 2 h = 120 minut
2. autobus .... 1,5 h = 90 minut
3. autobus .... 45 minut
4. autobus .... $\frac{1}{2}$ h = 30 minut

Nyní hledáme nejmenší společný násobek čísel 120, 90, 45, 30. Rozložíme je v součin prvočísel:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad$ $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad$ $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Nejmenší společný násobek je tedy:
$n(30, 45, 90, 120) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$

Zkouška
$360 : 30 = 12, \quad 360 : 45 = 8, \quad 360 : 90 = 4, \quad 360 : 120 = 3$
Autobusy se ve stanici opět setkají nejdříve za 360 minut, tj. za 6 hodin.

Poznámka
Při hledání nejmenšího společného násobku čísel 120, 90, 45, a 30 můžeme postupovat také takto:

1. Hledáme pouze nejmenší společný násobek čísel 120 a 90, neboť číslo 90 je násobkem čísel 45 a 30. Tento postup je výhodnější (kratší).
2. Vybereme nejvyšší hodnotu z daných čísel, tj. číslo 120. Zkoušíme, zda číslo 120 nebo jeho další násobky 240, 360, 480, ... jsou zároveň násobkem ostatních čísel. Čísla 120 a 240 vyloučíme, neboť nejsou dělitelná ani 45, ani 90. Další násobek, tj. číslo 360, vyhovuje, je násobkem všech čísel, a to násobkem nejmenším.

Úlohy

17. Ze stejné konečné stanice vyjíždějí ráno v 5 hodin 10 minut čtyři tramvaje na různé linky. První se do této stanice vrací za 1 hodinu, druhá za 40 minut, třetí za 2 hodiny a čtvrtá za 1 hodinu 20 minut. V kolik hodin nejdříve se opět všechny tramvaje v této stanici setkají?

18. Tři parníky vypluly ze stejného přístavu ve stejnou dobu na své trasy. První se vracel do tohoto přístavu třetí den, druhý se vracel čtvrtý den a třetí se vracel šestý den. Nejdříve kolikátý den od vyplutí se opět všechny parníky v tomto přístavu setkaly?

19. V balíku je méně než 50 m látky. Budeme-li z ní stříhat jen na blůzy nebo jen na šaty, nezůstane nám žádný zbytek. Na jednu blůzu se spotřebuje 1,5 m látky, na jedny šaty 3,2 m. Určete množství látky v balíku.

20. Zahradník vázal kytice po 8 květech a žádný mu nezbyl. Pak zjistil, že mohl vázat kytice po šesti květech a také by mu žádný nezbyl. Kolik měl zahradník květů, jestliže jich měl více než 50 a méně než 100?

* **21.** Dvě auta odvážejí z téhož pole řepu do cukrovaru. Obě jezdí stejnou průměrnou rychlostí. Auto s mechanickým vyklápěním potřebuje na cestu do cukrovaru a zpět 15 minut, auto, které nemá mechanické vyklápění, potřebuje na tutéž cestu o 6 minut déle. Obě auta vyjedou ráno současně. Kolikrát se setkají na poli za směnu (8 hodin)?

* **22.** Máme dvě měřítka. Dílky stupnice na jednom měřítku jsou navzájem vzdáleny 1 cm, na druhém měřítku 15 mm. Měřítka jsou přiložena k sobě tak, že splývají jejich počáteční dělicí čárky. Které další dělicí čárky splývají. Najděte aspoň tři případy.

Příklad 3

Auto ujelo první den 186 km, druhý den 124 km a třetí den 248 km. Každý den jelo stejnou průměrnou rychlostí, a to celý počet hodin. Jaká byla jeho průměrná rychlost, jestliže jelo největší možnou rychlostí?

Řešení
Musíme najít největšího společného dělitele čísel 186, 124 a 248.
$186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$
$124 = 2 \cdot 2 \cdot 31$
$248 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31$
Největší společný dělitel je tedy: $D(124, 186, 248) = 2 \cdot 31 = 62$

Zkouška
$186 : 62 = 3$
$124 : 62 = 2$
$248 : 62 = 4$
Auto jelo průměrnou rychlostí 62 km za hodinu.

Úlohy

23. Určete největšího společného dělitele čísel:
a) 44, 76 a 128 $\qquad$ b) 55, 132 a 176

c) 56, 126 a 182 d) 144, 180 a 378

24. Ve dvou jídelnách rekreačního objektu je stejné uspořádání židlí kolem stolů. V první jídelně může obědvat nejvýše 78 osob, ve druhé nejvýše 54 osob. Kolik židlí nejvýše může být kolem jednoho stolu?

25. Rozdělte tři úsečky o délkách 13 cm, 26 cm a 19,5 cm na části tak, aby jednotlivé části byly stejně dlouhé a co nejdelší. Jak dlouhé budou jednotlivé části a kolik jich bude?

26. Učeň v obchodě s hračkami měl rozdělit 255 červených, 270 modrých a 450 zelených kuliček do sáčků tak, aby všechny sáčky měly stejný obsah. Nejvýše kolik stejných sáčků mohl připravit? Kolik kuliček jednotlivých barev bylo v každém sáčku?

27. Jirka si vyjel na mopedu na třídenní výlet. První den ujel 90 km, druhý den 30 km a třetí den 60 km. Jel vždy stejnou průměrnou rychlostí a vždy celý počet hodin. Vypočítejte jeho průměrnou rychlost, jestliže jel největší možnou rychlostí.

* **28.** Traktorista zoral první den 4,5 ha, druhý den 6,3 ha a třetí den 5,4 ha. Pracoval denně celý počet hodin a jeho hodinový výkon se neměnil a byl nejvyšší z možných. Kolik hektarů zoral za jednu hodinu?

29. Kolik různých obdélníků lze sestavit ze šedesáti čtvercových dlaždic? Určete rozměry těchto obdélníků počtem dlaždic.

30. Z kolika dlaždic o rozměrech 20 cm a 30 cm můžeme sestavit čtverec, máme-li k dispozici nejvýše 100 dlaždic?

31. Na misce ležely třešně. Mohly být rozděleny stejným dílem mezi 4 nebo 6 nebo 8 nebo 12 dětí. Kolik třešní bylo na misce, byl-li to nejmenší možný počet?

32. 72 děvčat se mělo postavit do řad, v každé řadě měl být stejný počet děvčat. Počet řad musel být větší než dvě, počet děvčat v řadě více než deset. Najděte všechny možnosti jejich seřazení.

33. Určete nejmenší počet kuliček, který by se dal rozdělit na hromádky po 7 nebo po 8 nebo po 6 kuličkách.

34. Na záhon chceme střídavě sázet několik řádků sazenic květáku a několik řádků sazenic salátu. Sazenice květáku se vysazují ve vzdálenosti 45 cm od sebe, sazenice salátu ve vzdálenosti 25 cm. Výsadba sazenic obou druhů rostlin se začíná od kraje řádků a musí být ukončena na konci řádků. Určete nejkratší možnou délku řádků.

35. Úsečky délek 20 cm a 1,6 dm máme rozdělit na stejné díly tak, aby jejich délka v centimetrech byla vyjádřena celým číslem. Jak je můžeme dělit?

36. V divadle je více než 320 míst a méně než 330 míst. V každé řadě je 18 sedadel. Kolik řad a kolik sedadel je v divadle?

37. Společný násobek tří čísel je 3 276. Jedno číslo je v něm obsaženo 7krát, druhé 63krát a třetí 9krát. Která jsou to čísla?

38. Taneční kroužek měl tolik členů, že mohli nastupovat po třech nebo po čtyřech nebo po osmi. Kolik členů měl kroužek, víte-li, že to byl nejnižší možný počet?

39. Jana a Eva četly stejnou knihu. Jana přečetla denně 14 stran a dočetla ji o den dříve než Eva, která přečetla denně 12 stran. Kolik stran měla kniha?

* **40.** Obvod pozemku obdélníkového tvaru o rozměrech 40 m a 56 m byl vykolíkován tak, že vzdálenosti mezi kolíky byly stejné a bylo možné je vyjádřit celistvými násobky metru. Kolik kolíků potřebovali, když pro vykolíkování byly zvoleny největší možné vzdálenosti mezi kolíky?

* **41.** Petr rozřezal dvě tyče na stejné, ale co největší možné díly. Jedna tyč měřila 42 cm, druhá 63 cm. Kolik řezů musel udělat?

* **42.** Po obvodu obdélníkového záhonu o rozměrech 3,2 m a 4,4 m se měly vysázet květiny tak, aby mezi nimi byly co největší stejné vzdálenosti vyjádřené celistvými násobky decimetru a aby v každém rohu záhonu byla sazenice. Kolik sazenic bylo třeba?

* **43.** Sad má délku 60 m a šířku 42 m. Jak daleko od sebe budeme dávat sloupky pro oplocení, mají-li být vzdálenosti mezi sloupky po délce i šířce stejné a mají-li být vyjádřeny celistvými násobky metru?

☐ **44.** Kolem zahradnictví se opravoval plot. Z původních sloupků na jedné straně byly ponechány čtyři sloupky. Mezi 1. a 2. sloupkem byla vzdálenost 4,8 m, mezi 2. a 3. sloupkem 12 m a mezi 3. a 4. sloupkem 7,2 m. Jak daleko byly od sebe původní sloupky, jestliže to bylo více než 2 m, ale méně než 3 m a sloupky byly od sebe stejně vzdáleny?

3 PROCENTA

Příklad 1

Vypočítejte 17 % z 215 t.

Řešení

$z = 215$ t
$p = 17$
$č = \dots$ t

z .... 215 t
1 % ze z .... 2,15 t
$č$ .... 2,15 t · 17 = 36,55 t

17 % z 215 t je 36,55 t.

Úlohy

1. Vypočítejte:

a) 9,8 % ze 125 kg
b) 115 % z 1 080 Kč
c) 0,4 % ze 150 l
d) 215 % z 37 t

2. Vypočítejte:

a) 13 % z 13 km
b) 225 % z 2,4 dm^2
c) 0,69 % z 12 500 Kč
d) 2,2 % z 1,5 m^3

3. V Maďarsku je z 5 miliónů ha orné půdy zavlažováno přibližně 5 % půdy. Kolik ha orné půdy je v Maďarsku zavlažováno?

Příklad 2

Vypočítejte, kolik procent je 25,5 l ze 75 l.

Řešení

$z = 75$ l
$č = 25,5$ l
$p = \dots$

z .... 75 l
1 % ze z .... 0,75 l
p % ze z .... $p \cdot 0,75$ l $= 25,5$ l

$$p = \frac{25{,}5}{0{,}75}$$
$$p = 34$$

25,5 l je 34 % ze 75 l.

Úlohy

4. Vypočítejte, kolik procent je:

a) 278,2 kg z 214 kg
b) 390,60 Kč ze 420 Kč
c) 0,36 l ze 120 l
d) 198 kg z 900 kg

5. Traktorista má za úkol zorat 24 ha pole. Zoral již 20,64 ha. Jakou část úkolu již splnil?

6. Délka toku Labe je 1 122 km. Délka toku Labe na území naší republiky je 396 km. Kolik procent z celkové délky toku Labe je na území naší republiky?

Příklad 3

Prvním potrubím přitéká do nádrže 54 hl vody za hodinu, druhým potrubím 1,32 l vody za sekundu. Vypočítejte, o kolik procent více nebo méně vody přitéká za jednotku času do nádrže druhým potrubím než potrubím prvním.

Řešení

Pro výpočet musíme znát oba údaje ve stejných jednotkách. Jednotku $\frac{\mathrm{hl}}{\mathrm{h}}$ vyjádříme v $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$. Potom určíme, o kolik více nebo méně vody přitéká do nádrže druhým potrubím než potrubím prvním a vypočítáme příslušná procenta.

$$54\,\frac{\mathrm{hl}}{\mathrm{h}} = 54 \cdot \frac{100\ \mathrm{l}}{3\,600\ \mathrm{s}} = 1{,}5\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}},$$

$$1{,}5\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}} - 1{,}32\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}} = 0{,}18\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$$

$$z = 1{,}5\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$$

$$č = 0{,}18\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$$
$$p = \ldots$$

z .... $1{,}5\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$

1 % ze z .... $0{,}015\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$

p % ze z .... $p \cdot 0{,}015\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}} = 0{,}18\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$

$$p = \frac{0{,}18}{0{,}015}$$
$$p = 12$$

Druhým potrubím přitéká do nádrže za jednotku času o 12 % vody méně než potrubím prvním.

Úlohy

7. Vypočítejte, kolik procent je:

a) 96 g z 0,8 kg
b) 30 h z 5 Kč
c) 120 cm^2 z 1 m^2
d) 28 m z 3,5 km

8. Vypočítejte, kolik procent je:

a) 1,92 kW ze 120 W
b) $622{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ ze $7\,320\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
c) 0,851 kPa ze 115 Pa
d) $6{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ z $54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Příklad 4

Zvětšete částku 1 080 Kč o 3,5 %.

Řešení

Úlohu můžeme řešit dvojím způsobem:

1. Obnos 1 080 Kč představuje základ z, ze kterého počítáme procentovou část $č$, odpovídající počtu procent $p = 103{,}5$.

2. Obnos 1 080 Kč představuje základ z, ze kterého počítáme procentovou část $č$, odpovídající počtu procent $p = 3{,}5$; vypočítanou procentovou část pak přičteme k základu.

1. způsob:

$z = 1\,080$ Kč
$p = 103{,}5$
$č = \ldots$ Kč

z .... 1 080 Kč
1 % ze z .... 10,80 Kč
$č$ .... $10{,}80\ \text{Kč} \cdot 103{,}5 = 1\,117{,}80$ Kč

2. způsob:

$z = 1\,080$ Kč
$p = 3{,}5$
$č = \ldots$ Kč

z .... 1 080 Kč
1 % ze z .... 10,80 Kč
$č$ .... $10{,}80\ \text{Kč} \cdot 3{,}5 = 37{,}80$ Kč

$z + č = 1\,080\ \text{Kč} + 37{,}80\ \text{Kč} = 1\,117{,}80$ Kč

Zvětšená částka činí 1 117,80 Kč.

Příklad 5

Zmenšením neznámého čísla o 68 dostaneme 92 % jeho hodnoty. Určete neznámé číslo.

Řešení

Hledáme základ z. Číslo 68 představuje 8 % jeho hodnoty.

$č = 68$
$p = 8$
$z = \ldots$

8 % ze z 68
1 % ze z .... $68 : 8 = 8{,}5$
z .... $8{,}5 \cdot 100 = 850$

Hledané neznámé číslo je 850.

Úlohy

9. Zvětšete:

a) číslo 460 o 45 % b) číslo 0,8 o 35 %
c) číslo 64 o 120 % d) číslo 220 o 22 %

10. Zmenšete:

a) číslo 225 o 16 % b) číslo 540 o 72 %
c) číslo 90 o 8,8 % d) číslo 1 780 o 12,3 %

11. Vypočítejte číslo m, víte-li:

a) 43,6 % z m je 370,6 b) 0,75 % z m je 1,2
c) 15 % z m je 0,72 d) 412 % z m je 1 854

12. Zlepšením pracovního postupu se při stavbě rodinného domku ušetřilo 11 160 Kč, což bylo 1,5 % z celkového rozpočtu. Jaký byl rozpočet na rodinný domek?

13. Sušením materiálu se zmenší jeho objem o 15 %. Jaký musí být objem materiálu před sušením, má-li být jeho objem po usušení 5,1 m^3?

14. Zvětšíme-li neznámé číslo o 4 % dostaneme číslo 780. Určete neznámé číslo.

15. Zmenšíme-li neznámé číslo o 28,5 % dostaneme číslo 243,1. Určete neznámé číslo.

16. Zmenšíme-li neznámé číslo o 427 dostaneme 65 % jeho hodnoty. Určete neznámé číslo.

17. Číslo 222 je o 20 % větší než původní číslo. Určete původní číslo.

18. 19 % z neznámého čísla je o 12 méně než 23 % z téhož čísla. Určete neznámé číslo.

Příklad 6

V roce 1990 stál jistý výrobek 7 100 Kč, koncem roku 1991 se prodával za 7 739 Kč. Vypočítejte, o kolik procent byla jeho cena zvýšena.

Řešení

$z = 7\,100$ Kč
$č = 7\,739$ Kč
$p = \ldots$

z .... 7 100 Kč
1 % ze z .... 71 Kč
p % ze z .... $p \cdot 71$ Kč = 7 739 Kč

$$p = \frac{7\,739}{71}$$

$$p = 109$$

Cena výrobku byla zvýšena o 9 %.

Úlohy

19. Pracovníci jednoho úseku dílny obrobili v jenom dni místo plánovaných 480 součástek 516 součástek. O kolik procent překročili plán?

20. Zemědělská farma zvýšila počet ustájených krav o 14 % na 285 kusů. O kolik kusů zvýšila farma počet ustájených krav?

21. Šaty byly zlevněny z 1 680 Kč na 1 302 Kč. Vypočítejte, o kolik procent byly zlevněny.

22. Traktoristé překročili denní normu setí obilovin o jednu pětinu a oseli celkem 114 ha polí. Vypočítejte jejich denní normu.

23. Turistický oddíl zasadil na jaře 145 stromků; bylo to o 16 % více, než plánoval. Jaký byl jeho původní plán?

24. Množství krve v lidském těle je přibližně 7,6 % hmotnosti těla. Kolik kilogramů krve je v těle dospělého člověka o hmotnosti 75 kg?

25. Na pozemku o výměře 550 m^2 stojí chata. Obsah plochy zastavěné chatou je 44 m^2. Určete v procentech obsah nezastavěné plochy pozemku.

26. Spolková země Tyroly zaujímá přibližně 15 % rozlohy Rakouska. Určete rozlohu Tyrol, je-li rozloha Rakouska přibližně 83 800 km^2.

27. Farma osela veškerou ornou půdu čtyřmi druhy plodin. Pšenice byla zaseta na 380 ha, cukrovka na 200 ha, kukuřice na 120 ha a ječmen na 100 ha půdy. Určete výměru půdy jednotlivých plodin v procentech.

28. Z 800 zaměstnanců závodu je 344 žen. Kolik procent z celkového počtu zaměstnanců tvoří muži a kolik ženy?

29. Z hrubé mzdy bylo pracovníkovi sraženo na daních 864 Kč, což představovalo 21,6 % jeho hrubé mzdy. Jak velká byla hrubá mzda pracovníka? Jak velká částka mu byla vyplacena?

30. Pro zimní výprodej byla stanovena cena bot na 85 % původní ceny. Nová cena činila 510 Kč. Určete původní cenu bot.

31. Šaty byly zlevněny o 132 Kč, což je 15 % jejich původní ceny. Určete původní cenu šatů.

32. Vypočítejte, o kolik Kč vzroste uložený vklad 6 450 Kč za jeden rok, je-li úročen 4,5 % za rok.

33. Vklad byl uložen jeden rok při ročním úroku 7,5 %. Po připsání úroků vzrostl na částku 36 012,50 Kč. Určete původní vklad.

34. Vklad 27 500 Kč byl uložen čtvrt roku při ročním úroku 3,6 %. O jakou částku vzrostl?

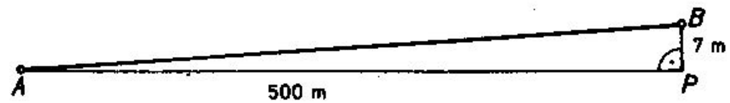
Příklad 7

Mezi místy A, B, jejichž vodorovná vzdálenost $|AP| = 1{,}3$ km, má železniční trať stoupání 14 ‰. Určete rozdíl nadmořských výšek míst A, B.

Poznámka

Značka ‰ se nazývá promile a znamená jednu tisícinu z určitého základu. Používá se k vyjádření stoupání nebo klesání železničních tratí. Např. stoupání 14 ‰ má železniční trať, mají-li dvě místa A, B na trati, jejichž vodorovná vzdálenost AP je 500 m, rozdíl nadmořských výšek 7 m (obr. 1);

$$500\,\text{m} \cdot \frac{14}{1\,000} = 7\,\text{m}.$$



Obr. 1

Vztah mezi ‰ a %:
1 ‰ odpovídá 0,1 %
1 % odpovídá 10 ‰

Řešení

$z = 1{,}3\ \text{km} = 1\,300\ \text{m}$
$p = 1{,}4$
$č = |BP| = \ldots\ \text{m}$

z .... 1 300 m
1 % ze z .... 13 m
$č$ .... $13\ \text{m} \cdot 1{,}4 = 18{,}2\ \text{m}$

Rozdíl nadmořských výšek míst A a B na železniční trati je 18,2 m.

Úlohy

35. Mezi místy A, B, jejichž vodorovná vzdálenost je 1,5 km, má železniční trať stoupání 8 ‰, mezi místy B, C, jejichž vodorovná vzdálenost je 900 m, má železniční trať stoupání 14 ‰. Určete rozdíl nadmořských výšek míst A, C.

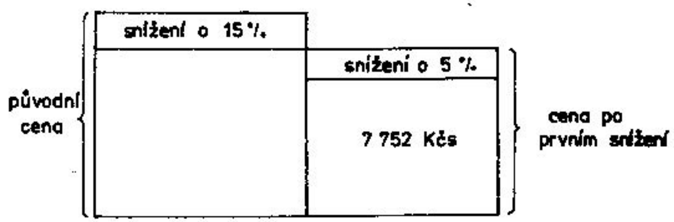
36. Rozdíl nadmořských výšek míst A, B na železniční trati je 38,5 m, jejich vodorovná vzdálenost je 3,5 km. Určete stoupání trati.

Příklad 8

Cena ledničky byla dvakrát snížena. Nejprve o 15 %, později ještě o 5 % z nové ceny. Po tomto dvojím snížení cen se lednička prodávala za 7 752 Kč. Vypočítejte její původní cenu.

Řešení

Znázorníme si celou situaci nejprve graficky (obr. 2):



Obr. 2

Výpočet provádíme postupně od nové ceny k ceně původní.

$č_1 = 7\,752$ Kč
$p_1 = 95$
$z_1 = \ldots$ Kč

Vypočítaný základ z_1 je zároveň částí $č_2$ základu z_2 pro výpočet původní ceny ledničky.

$č_2 = z_1$
$p_2 = 85$
$z_2 = \ldots$ Kč

95 % ze z_1 .... 7 752 Kč
1 % ze z_1 .... 7 752 Kč : 95 = 81,60 Kč
z_1 .... 81,60 Kč · 100 = 8 160 Kč
85 % ze z_2 .... 8 160 Kč
1 % ze z_2 .... 8 160 Kč : 85 = 96 Kč
z_2 .... 96 Kč · 100 = 9 600 Kč

Původní cena ledničky byla 9 600 Kč.

Úlohy

37. Dámský svetr byl dvakrát zlevněn. Nejprve o 10 %, později ještě o 10 % z nové ceny. Jeho konečná cena byla 324 Kč. Určete původní cenu svetru.

38. Rozhlasový přijímač, jehož původní cena byla 2 200 Kč, byl po technickém zdokonalení zdražen o 20 %. Později byl o 15 % z nové ceny zlevněn. Jaká byla jeho konečná cena?

39. Zboží, jehož původní cena byla 1 200 Kč, bylo dvakrát zlevněno. Nejprve o 15 %, později o 10 % z nové ceny. Určete konečnou cenu zboží a počet procent, o něž bylo zboží celkem zlevněno.

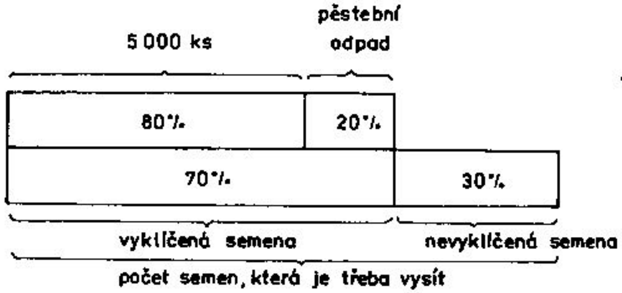
* **40.** Pracovníci jedné dílny obráběli během tří měsíců stejné součástky. Jejich výkon stoupal tak, že každý následující měsíc obrobili o 10 % více součástek než v předcházejícím měsíci. V posledním měsíci obrobili 484 součástek. Kolik součástek obrobili v prvním měsíci? Kolik součástek obrobili celkem?

Příklad 9

Zahradnictví má připravit pro drobný prodej 5 000 kusů bramboříků v květináčích. Klíčivost semen bramboříků je 70 % a pěstební odpad, tj. množství uhynulých rostlin z vyklíčených semen, je asi 20 %. Určete počet semen, která je třeba vysít, aby byla zajištěna dodávka 5 000 kusů bramboříků. Výsledek zaokrouhlete na stovky nahoru.

Řešení

Situaci si nejprve vyznačíme graficky (obr. 3):



Obr. 3

$\check{c}_1 = 5\,000$ ks
$p_1 = 80$
$z_1 = \dots$ ks

$\check{c}_2 = z_1$
$p_2 = 70$
$z_2 = \dots$ ks

80 % ze z_1 .... 5 000
1 % ze z_1 62,5
z_1 .... 6 250
70 % ze z_2 .... 6 250
1 % ze z_2 .... $\doteq$ 89,286
z_2 .... 8 928,6

zaokrouhleno na stovky nahoru ... 9 000 ks
Je třeba vysít 9 000 semen.

Úlohy V NOVÉ 3.P

41. Klíčivost semen karotky je 85 %, hmotnost 1 000 semen karotky je přibližně 2,4 g. Kolik semen vzklíčí, zasejeme-li 8 g semena?

* **42.** Pro výsadbu skleníkových okurek je třeba 310 kusů sazenic. Jeden gram semena obsahuje průměrně 30 zrn, jejich klíčivost je 80 %. Pěstební odpad od výsevu do výsadby činí 38 % z klíčících rostlin. Určete v gramech hmotnost semen, která se musí vysít, aby byla zajištěna plánovaná výsadba.

* **43.** Kruhový záhon o průměru 10 m se má osázet begóniemi. Na jednu sazenici je zapotřebí 2 dm^2 plochy záhonu. Jeden gram semena má 5 000 zrn, klíčivost semen je 85 %. Pěstební odpad od výsevu do výsadby je 20 % z klíčících rostlin. Určete hmotnost semen (v desetinách gramů), která se musí vysít, aby bylo zajištěno osázení květinového záhonu.

* **44.** Farmář pěstoval pšenici na 90 ha a sklidil z hektaru 4,3 t obilí. V příštím roce zvýšil osevní plochu pšenice o 20 % a hektarový výnos byl o 10 % vyšší. Kolik pšenice sklidil? O kolik procent více pšenice sklidil?

* **45.** Rozborem půdy bylo zjištěno, že je nutno do půdy jednorázově dodat 6 g dusíku na 1 m^2. Kolik hnojiva — síranu amonného — je zapotřebí na pohnojení pozemku o výměře 3,5 ha? Uvedené hnojivo obsahuje 21 % dusíku.

* **46.** Pozemek byl pohnojen fosforečným hnojivem v dávce 3 g fosforu na 1 m^2. Celkem bylo použito 0,25 t hnojiva. Použité hnojivo obsahuje 12,6 % fosforu. Vypočítejte výměru pozemku, která byla pohnojena.

* **47.** Louka o výměře 1 500 m^2 byla pohnojena 12 kg močoviny. Močovina obsahuje 45 % dusíku. Kolik dusíku připadlo na 1 m^2?

* **48.** Kráva spotřebuje v zimních měsících denně kromě jiného 4 kg sena. Seno obsahuje 85 % sušiny, ve které je 8 % stravitelných dusíkatých látek. Jaké množství stravitelných dusíkatých látek je v denní dávce sena pro stádo 250 krav?

* **49.** Při krmení prasat se používá kromě jiného krmná řepa. Ta obsahuje 11 % sušiny, v které je 0,7 % stravitelných dusíkatých látek. Jaké množství krmné řepy se spotřebovalo za jeden měsíc (30 dní), víte-li, že hmotnost stravitelných dusíkatých látek obsažených v denní dávce řepy byla 0,616 kg?

* **50.** Masný průmysl předal $\frac{7}{12}$ vyrobených šunkových konzerv na vývoz, $\frac{7}{10}$ zbytku dodal na domácí trh. Kolik procent vyrobených šunkových konzerv má ještě na skladě?

51. Pro nově budovanou cestu musel být delší rozměr obdélníkového pozemku zkrácen o 7 % a kratší rozměr o 8 %. Jaké jsou nové rozměry pozemku a o kolik procent se zmenšila jeho výměra? Původní rozměry pozemku byly 60 m a 30 m.

□ **52.** Zmenšíme-li délku hrany krychle o 20 %, má krychle objem 512 m^3. Určete původní délku hrany krychle. O kolik procent se zmenšil objem krychle proti původnímu objemu?

4 POMĚR. PŘÍMÁ A NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

Příklad 1

K poměru 3 : 7 napište

a) poměr k němu převrácený,

b) poměr jemu rovný, jehož členy jsou desetinná čísla.

Řešení

a) Převrácený poměr k poměru 3 : 7 je 7 : 3.

b) Např.: 3 : 7 = 0,3 : 0,7 nebo 3 : 7 = 0,06 : 0,14.

Úlohy

1. Uveďte libovolnou dvojici

a) desetinných čísel,

b) záporných celých čísel,

c) zlomků

takovou, aby její členy byly v poměru 3 : 7.

2. Jsou dány poměry 2,5 : 5; $\frac{5}{2}$: 4; 7 : 2; 3,5 : 1; 5 : 8; 0,1 : $\frac{1}{5}$. Vypište poměry, které se sobě rovnají.

3. Napište převrácené poměry k poměrům z úlohy 2.

4. Vyjádřete co nejmenšími přirozenými čísly poměry 90 : 50; $(-7) : (-14)$; 0,12 : 0,15; $10^6 : 10^8$.

5. Určete dvě libovolná trojciferná čísla tak, aby byla v poměru 4 : 7.

* **6.** Určete dvě dvojciferná čísla tak, aby byla v poměru 7 : 3 a jejich rozdíl byl 20.

Příklad 2

Obdélníkový pozemek má na plánu rozměry 1,8 cm a 2,4 cm.

a) Zmenšete je v poměru 2 : 3 (2 < 3),

b) zvětšete je v poměru 5 : 3 (5 > 3).

Řešení

a) $1{,}8 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2$

$2{,}4 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$

Zmenšené rozměry jsou 1,2 cm a 1,6 cm.

b) $1{,}8 \cdot \frac{5}{3} = 0{,}6 \cdot 5 = 3$

$2{,}4 \cdot \frac{5}{3} = 0{,}8 \cdot 5 = 4$

Zvětšené rozměry jsou 3 cm a 4 cm.

Úlohy

7. Zvětšete číslo 5 v poměru a) 3 : 2, b) 20 : 5, c) 1 : 10, d) 100 : 1.

8. Zmenšete číslo 5 v poměru a) 2 : 15, b) 3 : 25, c) 1 : 10, d) 100 : 1.

9. Rozměry negativu jsou 36 mm a 24 mm. Jaké budou rozměry fotografie při zvětšení 21 : 4?

10. Na mapě zhotovené v měřítku 1 : 25 000 je vzdušná vzdálenost dvou měst 3,5 cm. Jaká je skutečná vzdušná vzdálenost těchto měst?

11. Určete rozměry, které má obdélníkový pozemek na plánu s měřítkem 1 : 500, má-li ve skutečnosti rozměry 20 m a 25 m.

12. Osm centimetrů na mapě představuje dva kilometry ve skutečnosti. Určete měřítko této mapy.

Příklad 3

Tři podílníci si rozdělili zisk 125 000 Kč v poměru 3 : 2 : 5. Kolik každý z nich získal?

Řešení

125 000 Kč rozdělíme na $3+2+5 = 10$ dílů, z nichž prvnímu podílníkovi připadnou tři díly, druhému podílníkovi dva díly a třetímu podílníkovi pět dílů.

zisk celkem .... 125 000 Kč
poměr .... 3 : 2 : 5

celkový počet dílů .... $3 + 2 + 5 = 10$ dílů
1 díl .... 125 000 Kč : 10 = 12 500 Kč
1. podílník .... $3 \cdot 12\,500$ Kč = 37 500 Kč
2. podílník .... $2 \cdot 12\,500$ Kč = 25 000 Kč
3. podílník .... $5 \cdot 12\,500$ Kč = 62 500 Kč
celkem 125 000 Kč

První podílník získal 37 500 Kč, druhý 25 000 Kč a třetí 62 500 Kč.

Úlohy

13. Rozdělte číslo 56 v poměru 3 : 5.

14. Na společném úkolu odpracoval jeden pracovník 36 hodin a druhý 40 hodin. O výdělek 11 400 Kč se rozdělili v poměru počtu odpracovaných hodin. Kolik dostal každý?

15. Dva kamarádi dostali za odevzdané láhve 48 Kč. Rozdělili se v poměru 5 : 7. Kolik dostal každý?

16. Kláda délky 145 cm byla rozřezána na 3 kusy, jejichž délky jsou v poměru 12 : 9 : 8. Vypočítejte délky jednotlivých kusů.

Příklad 4

Sestrojte graf

a) přímé úměrnosti $y = 2x$

b) nepřímé úměrnosti $y = \frac{2}{x}$.

Zjistěte, zda na sestrojených grafech leží body o souřadnicích $A[2;6]$, $B[2;4]$, $C[4;2]$, $D[0;0]$, $E[0{,}01;200]$.

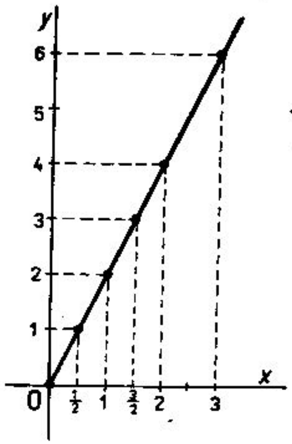
Řešení

a) Graf přímé úměrnosti $y = 2x$ je sestrojen na obr. 4.

b) Graf nepřímé úměrnosti $y = \frac{2}{x}$ je sestrojen na obr. 5.

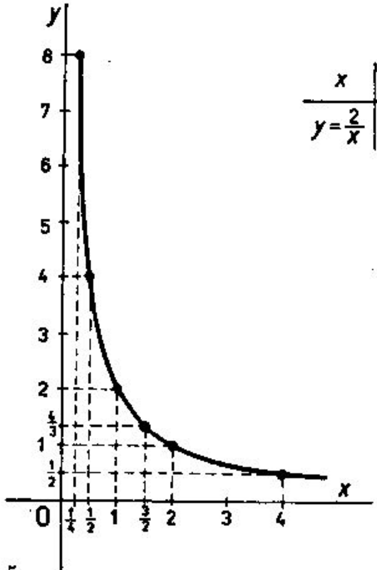
Abychom zjistili, zda dané body na grafech leží, nebo neleží, dosadíme jejich souřadnice za proměnné x, y do příslušných rovnic:

bod $A[2;6]$	$y = 2x$	$y = \frac{2}{x}$
	$6 \neq 2 \cdot 2$	$6 \neq \frac{2}{2}$



x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$y=2x$	0	1	2	3	4	6

Obr. 4



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	4
$y=\frac{2}{x}$	8	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{2}$

Obr. 5

	$6 \neq 4$	$6 \neq 1$
bod $B[2;\,4]$	$y = 2x$	$y = \frac{2}{x}$
	$4 = 2 \cdot 2$	$4 \neq \frac{2}{2}$
	$4 = 4$	$4 \neq 1$
bod $C[4;\,2]$	$y = 2x$	$y = \frac{2}{x}$
	$2 \neq 2 \cdot 4$	$2 \neq \frac{2}{4}$
	$2 \neq 8$	$2 \neq \frac{1}{2}$
bod $D[0;\,0]$	$y = 2x$	$y = \frac{2}{x}$
	$0 = 2 \cdot 0$	Pozor! Musí platit $x \neq 0$.
	$0 = 0$	
bod $E[0{,}01;\,200]$	$y = 2x$	$y = \frac{2}{x}$
	$200 \neq 2 \cdot 0{,}01$	$200 = \frac{2}{0{,}01}$
	$200 \neq 0{,}02$	$200 = 200$

Na grafu přímé úměrnosti leží body B a D, na grafu nepřímé úměrnosti leží bod E.

Úlohy

17. Rozhodněte, který z bodů $A[3;4]$, $B[8;0{,}125]$, $C[1;8]$, $D[0;8]$, $E[2;4]$, $F[0{,}25;4]$, $G[2;6]$ leží na grafu některé z těchto nepřímých úměrností: $y = \frac{8}{x}$, $y = \frac{12}{x}$, $y = \frac{1}{x}$.

18. Jeden kus ovoce kivi stojí 10 Kč. Sestrojte graf závislosti ceny na počtu kusů tohoto ovoce.

* **19.** Rozhodněte, jsou-li proměnné ve vztahu přímé, nebo nepřímé úměrnosti:

1. proměnná	2. proměnná	nemění se
a) doba letu	rychlost	vzdálenost
b) délka obdélníku	šířka obdélníku	obsah obdélníku
c) počet kusů	utržená částka	cena za jeden kus
d) výměra pole	množství sklizeného obilí	výnos z hekataru
e) počet výherců	výherní částka	souhrn všech výher
f) počet strojů	počet vyrobených kusů celkem	počet vyrobených kusů jedním strojem

20. Sestrojte graf vztahu mezi počtem stejně výkonných uklízeček a dobou, za kterou uklidí školní budovu, víte-li, že deset uklízeček ji uklidí za 2 dny.

* **21.** Určete rovnici přímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem [9; 3].

* **22.** Určete koeficient nepřímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem $K[2;2{,}4]$ a z grafu této nepřímé úměrnosti určete hodnoty proměnné x pro hodnoty $y = 9{,}6$, $y = 1$, $y = 1{,}6$.

Příklad 5

a) Šest dělníků vydělalo na stavbě za týden (5 pracovních dní) 12 600 Kč. Kolik vydělá při stejném denním průměrném platu 7 dělníků za 10 dní?

b) Šest dělníků splní určitý úkol za 12 hodin. Kolik času by potřebovalo na tuto práci 9 dělníků?

Řešení

a) 6 dělníků .... 5 dní .... 12 600 Kč
7 dělníků .... 10 dní .... x Kč

$$x = \frac{7}{6} \cdot \frac{10}{5} \cdot 12\,600 = \frac{7}{3} \cdot 12\,600 = 29\,400$$

Sedm dělníků vydělá za deset dní celkem 29 400 Kč.

b) 6 dělníků .... 12 hodin
9 dělníků .... x hodin

$$x = \frac{6}{9} \cdot 12 = 8$$

Devět dělníků splní danou práci za 8 hodin.

Úlohy

23. Pokladní vybrala za vstup na krytý plavecký stadión 944 Kč od 118 osob. Kolik vybere, bude-li stadión plně obsazen? (Kapacita je 190 osob.)

24. Skupina instalatérů v počtu šesti členů je hotova s danou prací za $3\frac{1}{2}$ dne. Za jak dlouho bude s touž prací hotovo sedm stejně výkonných instalatérů?

25. Čerpadlem o výkonu $25\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$ se nádrž naplní za 1 h 12 min. Za jak dlouho se nádrž naplní čerpadlem o výkonu $20\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$?

26. Z nádrže vyteče 120 hl vody 4 rourami za 6 hodin. Kolik vody vyteče 5 rourami se stejným průměrem za 14 hodin?

27. Automat vyrábí za 18 minut 456 součástek. Kolik jich vyrobí za 33 minut?

28. V sudu je 80 l vody. Voda sahá do výšky 45 cm. Kolik litrů vody bude v sudu, bude-li voda sahat do výšky 72 cm?

29. Měřítko mapy je 1 : 100 000. Kolik kilometrů je dlouhá ve skutečnosti cesta, která je na mapě dlouhá 4,7 cm?

30. Zvuk se ve vzduchu šíří rychlostí $330\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Sestavte tabulku závislosti vzdálenosti, kterou zvuk urazí za daný čas (pro 1 až 10 s, po jedné sekundě). Napište rovnici příslušné závislosti.

31. Jeden dm^3 železa má hmotnost 7,7 kg. Jakou hmotnost má železný předmět, jehož objem je $2{,}7\,dm^3$?

32. Vypařením 15 kg mořské vody se získá 517,5 g soli. Kolik soli se dostane ze 2 q mořské vody a kolik mořské vody je potřeba k získání 3 q soli?

33. Cukrovka obsahuje 13 % cukru. Z jakého množství cukrovky dostaneme 15 q cukru? Kolik cukru dostaneme z 15 q cukrovky?

34. Obvod obdélníku je 48 cm. Vypočítejte jeho rozměry, jsou-li v poměru 5 : 3.

35. Počet žáků, kteří do školy dojíždějí, k počtu žáků, kteří docházejí do školy pěšky, je dán poměrem 2 : 7.

a) Kolikrát více žáků do školy chodí pěšky, než dojíždí?

b) Kolik žáků dochází do školy pěšky, když dojíždějících žáků je 96?

c) Kolik žáků má tato škola?

36. Na přípravu švestkových knedlíků z bramborového těsta pro 4 osoby je třeba: 560 g brambor, 2 vejce, 200 g mouky, 48 g másla, 16 g cukru, 24 g tvarohu a $\frac{3}{5}$ kg švestek. Vypočítejte spotřebu surovin na přípravu knedlíků pro 15 osob.

37. Rodina Novákových měla roční spotřebu cukru 68,4 kg a rozhodla se v následujícím roce ji snížit v poměru 5 : 8. Kolik kg cukru může rodina Novákových spotřebovat v následujícím roce?

38. Rodina Novákových měla za dva měsíce spotřebu elektrické energie v denní sazbě 624 kW·h a v noční sazbě 3 018 kW·h. Kolik kW·h elektrické energie spotřebuje rodina Novákových nyní za dva měsíce v denní sazbě a kolik v noční sazbě, když se rozhodla snížit spotřebu v poměru 4 : 7?

39. 1 200 kg mouky se má rozdělit na dvě části tak, aby byly v poměru 3,5 : 2,5. Určete hmotnosti obou částí.

40. Na turistické mapě zhotovené v měřítku 1 : 100 000 je vzdálenost dvou míst po přímé silnici 6,5 cm. Za jak dlouho ujedeme tuto vzdálenost na kole, jedeme-li rychlostí 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$? Vyjádřete v minutách.

* **41.** Mostní pilíř je zčásti zapuštěn do země, část je pod vodou a nad vodou vyčnívá 55 cm. Délka části nad vodou k délce části ve vodě je v poměru 1 : 2. Délka části nad vodou k délce části zapuštěné v zemi je v poměru 5 : 7. Určete délku pilíře.

42. Pan Veselý vezl na trh 48 kg jablek. Vezl i jablka pana Kováře a Nováka (40 kg a 72 kg). Celkem dostal 1 920 Kč. Jak se zahrádkáři rozdělili o peníze?

43. Zvětšete v poměru 3 : 2 číslo 0,6.

44. Kus oceli dlouhý 0,5 m má hmotnost 2 kg. Určete hmotnost kusu této oceli, který má délku 2,5 m.

45. Ve škole je 32 chlapců a 142 dívek. Určete poměr

a) počtu chlapců k počtu dívek,

b) počtu dívek k počtu všech žáků školy.

46. Ze 2 kg švestek se získá 600 g povidel. Kolik povidel se získá ze 3,2 kg švestek?

47. Tyč 1,5 m dlouhá vrhá stín dlouhý 0,76 m. Jak vysoký je strom, který ve stejnou dobu vrhá stín dlouhý 9,12 m?

48. Rozdělte 800 g v poměru 1 : 5.

49. Tři dělníci vyhloubí příkop za 8 dní. Za jak dlouho vykoná tuto práci 6 dělníků?

50. Zmenšete číslo 0,8 v poměru 1 : 5.

51. Auto jedoucí rychlostí 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ dojede z místa A do místa B za $\frac{3}{4}$ hodiny. Za jak dlouho tam dojede cyklista jedoucí rychlostí 25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

52. Dva dělníci se dělí o odměnu 5 600 Kč v poměru 4 : 2. Kolik dostane každý?

53. Ve sportovní hale svítí 875 stejných žárovek 2 hodiny. Za jak dlouho spotřebuje stejné množství elektrické energie 100 takových žárovek?

54. Ubytování v hotelu stojí 1 800 Kč za 10 dní. Kolik se zaplatí za týden?

55. Zvětšete číslo $\frac{5}{7}$ v poměru 7 : 5.

56. Pumpa přečerpala za 17 minut 1 445 litrů vody. Kolik vody přečerpá za $\frac{1}{2}$ hodiny?

57. Zmenšete hmotnost 35 g v poměru 2 : 10.

58. Soška z bronzu má hmotnost 0,5 kg. Bronz je slitina cínu a mědi v poměru 1 : 4. Kolik gramů mědi a kolik gramů cínu obsahuje soška?

* **59.** Při sčítání lidu bylo ve městě napočítáno 22 185 obyvatel. Za 10 let tam již žilo 36 184 obyvatel. Předpokládáme-li, že počet obyvatel stoupá rovnoměrně, sestrojte graf této přímé úměrnosti.

60. Na pokrytí podlahy kuchyně je třeba 9,5 m linolea šíře 1 m. V prodejně měli linoleum šíře 2 m. Kolik metrů tohoto linolea je třeba koupit?

61. Tři děti dostaly 120 Kč a měly se rozdělit v poměru 3 : 7 : 2. Kolik dostal každý?

62. Délka strany jednoho čtverce je 6 cm, druhého čtverce 8 cm. Určete poměr jejich obvodů.

* **63.** Jedna plechovka barvy vystačí na natření 13 m^2. Kolik plechovek musíme koupit na nátěr podlah dvou místností, z nichž jedna má rozměry 4,5 m a 5,5 m a druhá 3,5 m a 6 m?

* **64.** Strany trojúhelníku jsou v poměru 2 : 2,5 : 3,5. Nejdelší strana má délku 60 mm. Určete délky ostatních dvou stran.

65. Šest lidí splní určitý úkol za 12 hodin. Kolik času by potřebovalo na tuto práci 9 lidí?

66. Výtah má maximální kapacitu 6 lidí, z nichž každý má hmotnost 80 kg. Maximálně kolik lidí o hmotnosti 60 kg může jet tímto výtahem?

* **67.** Vlak jede rychlostí 35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ po trati, která má stoupání 1 : 100. O kolik metrů vystoupí za jednu minutu?

* **68.** Ve školní jídelně připravují na oběd 490 porcí po 50 g vařeného masa. Vařením ztrácí maso asi 30 % své hmotnosti. Kolik kilogramů syrového masa musí školní jídelna připravit k vaření oběda?

69. V nádobě je 11,466 kg oleje. Kolik litrů oleje je v nádobě, jestliže jeden litr oleje má hmotnost 910 g?

* **70.** Graf přímé úměrnosti prochází bodem [2; 4]. Určete její rovnici a sestrojte graf.

* **71.** Graf nepřímé úměrnosti prochází bodem [1; 3]. Určete její rovnici.

72. Sestrojte graf nepřímé úměrnosti $y = \frac{2}{x}$.

73. Sestrojte graf přímé úměrnosti $y = 5x$.

74. Zjistěte, který z bodů $A[8;6]$, $B[0;0]$, $C[5;10]$, $D[10;5]$, $E[3;-3]$, $F[5;15]$ leží na grafu přímé úměrnosti $y = 5x$.

75. Zjistěte, který z bodů $A[1;8]$, $B[2;4]$, $C[8;1]$, $D[2;6]$, $E[0{,}25;4]$, $F[-1;-8]$ leží na grafu nepřímé úměrnosti $y = \frac{8}{x}$.

76. V domě s ústředním vytápěním se denně spotřebuje 0,6 t koksu. Zásoba koksu stačí na 75 dní. Na kolik dní bude stačit tato zásoba, sníží-li se denní spotřeba o 37,5 kg?

* **77.** Kolik kilogramů čerstvých jablek je třeba na 120 kg sušených jablek, jestliže z 0,4 tun čerstvých jablek získáme 75 kg sušených jablek?

78. Jaká je skutečná výměra ovocného sadu, který je na plánu v měřítku 1 : 500 zobrazen geometrickým obrazcem s obsahem 34 cm^2?

79. Vichřice má rychlost 31 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jak velkou vzdálenost urazí za $\frac{3}{4}$ hodiny?

80. Pracovní skupina vysazovala tři dny lesní stromky. První den vysadila 1 385 lesních stromků, druhý den 1 274 a třetí den 1 391 lesních stromků. Jak velkou výměru lesa osázela skupina, počítáme-li 7 500 stromků na jeden hektar?

* **81.** Stroj vyrobí za 1 hodinu 128 součástek. Po seřízení vyrobí za 1 hodinu 144 součástek. Určete

a) v jakém poměru je nová výkonnost stroje ke staré,

b) o kolik procent se zvýšila výkonnost stroje.

82. Rychlosti dvou motorových vozidel jsou v poměru 7 : 4. Kolik kilometrů ujede za stejnou dobu pomalejší vozidlo, když rychlejší vozidlo ujede 52,5 km?

83. 3,5 cm na mapě představuje 7 km ve skutečnosti. Určete měřítko této mapy.

84. Na automapě v měřítku 1 : 400 000 je přímá vzdálenost Hradce Králové od Jičína 10,5 cm. Určete skutečnou přímou vzdálenost těchto měst.

85. První kosmická rychlost je $8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, rychlost světla je $300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

Určete poměr první kosmické rychlosti k rychlosti světla.

86. Určete konstantu k přímé úměrnosti ve vztahu $y = k \cdot x$, je-li

a) $x = 1$, $y = 4$, b) $x = 2$, $y = 8$,

c) $x = 3$, $y = 6$, d) $x = 3$, $y = 5$.

* **87.** Určete rovnici přímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem

a) $A[2; 3]$, b) $B[-3; 1]$,

c) $C[-4; -5]$, c) $D[3; -2]$.

* **88.** Určete rovnici nepřímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem

a) $A[2; 3]$, b) $B[-1; 2]$,

c) $C[3; -2]$, d) $D[-2; -3]$.

89. Rozdělte číslo 36 v poměru 1 : 2 : 7.

90. Ivonce je 13 let a Báře 14 let. Na vánoce dostaly od strýčka 900 Kč. Kolik dostane každá, když se rozdělí v poměru svého stáří?

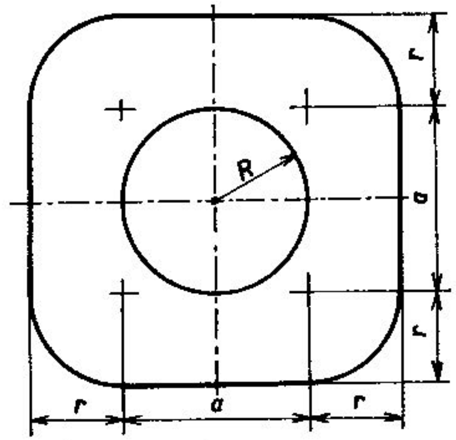
91. Počet otáček ozubených kol je v převráceném poměru k počtu zubů těchto kol. Menší kolo má 150 otáček za minutu a 28 zubů. Větší kolo má 120 otáček za minutu. Kolik zubů má větší kolo?

92. 12 skautů vysadilo za den 1 260 lesních stromků. Kolik stromků musí připravit lesní správa na příští den, je-li hlášeno na vysazování stromků 16 skautů?

93. Špatně utěsněným kohoutkem uniká 0,8 litrů vody za jednu hodinu. Kolik litrů vody uniklo v bytě s dvěma netěsnícími kohoutky, když oprava byla provedena za 10 dní?

94. Na turistické mapě Jizerských hor s měřítkem 1 : 100 000 jsou vyznačena místa Smědava, Souš a Jizerka. Na mapě zjistíme tyto přibližné vzdálenosti Smědava — Souš 6,5 cm, Smědava — Jizerka 5,5 cm, Souš — Jizerka 4 cm. Vypočítejte vzdálenosti těchto míst ve skutečnosti.

* **95.** Součástka je znázorněna na výkresu (obr. 6) v měřítku 3 : 1. Změřte potřebné údaje a vypočítejte jejich skutečné rozměry.



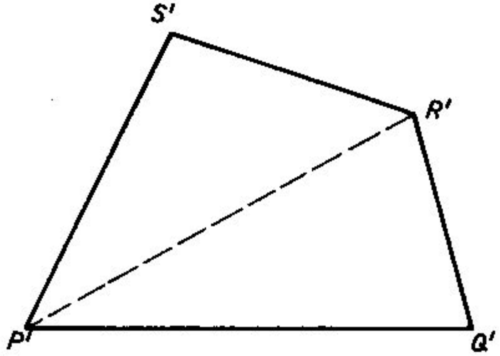
Obr. 6

* **96.** Na obrázku 7 je v měřítku 1 : 5 000 znázorněn pozemek ve tvaru čtyřúhelníku $P'Q'R'S'$.

a) Změřte jeho strany a zjistěte jejich skutečné délky.

b) Vypočítejte výměru tohoto pozemku. (Potřebné výšky trojúhelníků sestrojte a změřte.)

97. Jedna tuna černého uhlí vydá přibližně tolik tepla jako 1,6 t hnědého uhlí. Kolik tun hnědého uhlí se musí objednat na vytápění



Obr. 7

skleníku, jestliže v minulém roce bylo spotřebováno 28,5 t černého uhlí?

* **98.** Pole obdélníkového tvaru o rozměrech 560 m a 380 m mělo výnos 20 t brambor z jednoho hektaru. Kolik hektolitrů lihu se získalo z brambor sklizených z tohoto pole, jestliže z 8 t brambor se vyrobí 10,2 hl lihu?

99. Z řepy uložené na hromadě se ztrácí denně 16 g cukru na každých 100 kg řepy.
a) Kolik kilogramů cukru se ztratilo z hromady 328 tun cukrové řepy, když byla odvezena až za 8 dní?
b) Ztrátu cukru vyjádřete v korunách, jestliže 1 kg cukru stojí 18 Kč.

100. 10 dlaždičů mělo předláždit vozovku ulice za 22 pracovních dní. Po čtyřech dnech byli pro urychlení práce doplněni o další dva stejně výkonné dlaždiče.
a) Za kolik pracovních dnů dokončí nyní předláždění vozovky?
b) Kolik pracovních dnů celkem trvalo předláždění vozovky?

5 DRUHÁ MOCNINA A ODMOCNINA. PYTHAGOROVA VĚTA

Příklad 1

Kolik m^2 podlahové krytiny je třeba k pokrytí podlahy místnosti, která má tvar čtverce s délkou strany 4,75 m?

Řešení

Máme vypočítat obsah S čtverce, jehož strana má délku $a = 4{,}75$ m.
$S = a^2$

$S = 4{,}75^2$

a) na počítačce

$\boxed{C}$	0
4,75	4.75
$\boxed{\times}$	4.75
$\boxed{=}$	22,5625

b) v tabulkách

n	n^2
475	225 625
4,75	22,5625

$S = 22{,}5625$, po zaokrouhlení $S \doteq 22{,}6$.

$S \doteq 22{,}6\,m^2$
K pokrytí podlahy je třeba asi 22,6 m^2 podlahové krytiny.

Úlohy

1. Kolik m^2 tapet je třeba k vytapetování stropu místnosti, která má tvar čtverce s délkou strany 5,38 m. Výsledek zaokrouhlete na m^2.
2. Součet délek všech hran krychle je 30 cm. Určete její povrch.
3. Vypočítejte povrch krychle, jejíž hrana má délku 78,9 cm.
4. Nádrž tvaru krychle (bez víka) má hranu délky 1,8 m. Kolik m^2 plechu se spotřebuje na její zhotovení, připočítáme-li 4 % materiálu na spoje a odpad?

Příklad 2

Kolik metrů koberce širokého 4 m je třeba k pokrytí podlahy výstavní síně, která má tvar čtverce s obsahem 62,41 m^2?

Řešení

Nejprve určíme stranu čtverce, jehož obsah $S = 62{,}41\,\mathrm{m}^2$.
Platí $S = a^2$, odkud $a = \sqrt{S}$.

$a = \sqrt{62{,}41}$

a) na počítačce

$\boxed{\mathrm{C}}$ 0

62,41 62.41

$\boxed{\sqrt{\ }}$ 7.9

b) v tabulkách

1. způsob

Číslo 62,41 zaokrouhlíme tak, abychom mohli najít druhou odmocninu přímo v tabulce M 1.

$$\sqrt{62{,}41} \doteq \sqrt{62} \doteq 7{,}87 \doteq 7{,}9$$

2. způsob

V tabulce M 1 ve sloupci n^2 lze najít číslo 624 100, kterému odpovídá $n = 790$. To znamená, že $790^2 = 624\,100$ čili $\sqrt{624\,100} = 790$, a tedy $\sqrt{62{,}41} = 7{,}9$.

K pokrytí podlahy, která má tvar čtverce s délkou strany 7,9 m, bude zapotřebí koupit dva pásy 4 m širokého koberce; délka jednoho pásu je 7,9 m, celková délka je $2 \cdot 7{,}9\,\mathrm{m} = 15{,}8\,\mathrm{m}$.
K pokrytí podlahy je třeba 15,8 m koberce širokého 4 m.

Úlohy

5. Vypočítejte, kolik metrů linolea širokého 1,5 m je třeba k pokrytí čtvercové podlahy kuchyně, víte-li, že obsah podlahy je $8{,}41\,\mathrm{m}^2$.

6. Podlaha čtvercové místnosti je vydlážděna 2 209 čtvercovými dlaždicemi o straně 0,11 m. Jaké rozměry má podlaha?

7. Čtverec má stejný obsah jako obdélník, jehož strany mají délky 18,85 m a 23,60 m. Vypočítejte délku strany tohoto čtverce.

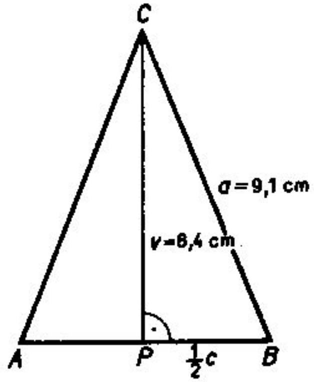
8. Určete délku hrany krychle, je-li její povrch $1\,296{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Příklad 3

Rovnoramenný trojúhelník ABC má ramena délky $a = b = 9{,}1\,\mathrm{cm}$ a výška k základně je $v = 8{,}4\,\mathrm{cm}$. Vypočítejte délku základny c.

Řešení

$a = 9{,}1\,\mathrm{cm}$
$v = 8{,}4\,\mathrm{cm}$
$c = \dots\,\mathrm{cm}$



Obr. 8

V pravoúhlém trojúhelníku BPC podle Pythagorovy věty platí:

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 - v^2$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 9{,}1^2 - 8{,}4^2$$

$$\frac{c^2}{4} = 82{,}81 - 70{,}56$$

$$\frac{c^2}{4} = 12{,}25$$

$$c^2 = 49$$

$$c = 7$$

$c = 7\,\mathrm{cm}$

Základna AB rovnoramenného trojúhelníku ABC má délku 7 cm.

Úlohy

9. Rovnoramenný trojúhelník ABC má ramena délky a, b, $a = b$, základnu délky c, výška k základně je v. Vypočítejte zbývající údaj, je-li dáno:

a) $c = 4{,}2\,\text{cm}$, $v = 2{,}8\,\text{cm}$

b) $a = 8{,}2\,\text{cm}$, $v = 1{,}8\,\text{cm}$

c) $v = 52\,\text{mm}$, $c = 78\,\text{mm}$

10. Obdélník $ABCD$ má délky stran a, b a úhlopříčku délky u. Vypočítejte zbývající údaj s přesností na desetiny, je-li dáno:

a) $a = 72\,\text{mm}$, $b = 34\,\text{mm}$

b) $a = 52{,}3\,\text{cm}$, $u = 67{,}1\,\text{cm}$

c) $b = 2{,}3\,\text{m}$, $u = 3{,}7\,\text{m}$

11. Délky stran obdélníku jsou v poměru 5 : 12 a obvod obdélníku je 238 cm. Vypočítejte délku úhlopříčky.

12. Vypočítejte výšku rovnostranného trojúhelníku s délkou strany $a = 3{,}6\,\text{cm}$.

13. Vypočítejte obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož strana má délku 2,0 m.

Příklad 4

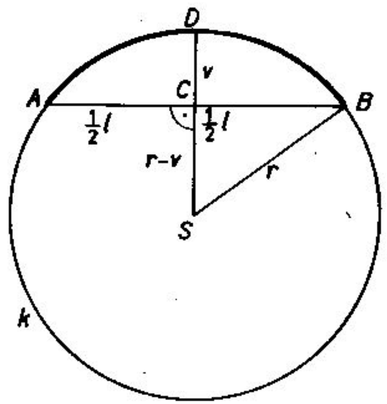
Mostní kruhový oblouk má rozpětí $l = 42\,\text{m}$ a výšku $v = 7\,\text{m}$. Vypočítejte poloměr kružnice, jejíž částí je kruhový oblouk.

Řešení (obr. 9)

$|AB| = l = 42\,\text{m}$

$|CB| = \dfrac{l}{2} = 21\,\text{m}$

$|DC| = v = 7\,\text{m}$



Obr. 9

V pravoúhlém trojúhelníku SBC ($|SB| = r$, $|BC| = \dfrac{l}{2}$, $|CS| = r - v$) podle Pythagorovy věty platí:

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (r - v)^2$$

$r^2 = 21^2 + (r - 7)^2$

$r^2 = 441 + r^2 - 14r + 49$

$14r = 490$

$r = 35$

$r = 35\,\text{m}$

Poloměr kružnice, jejíž částí je kruhový mostní oblouk, je 35 m.

Úlohy

14. Vzdálenost středu kružnice od tětivy je 2,5 cm, poloměr kružnice $r = 6{,}5\,\text{cm}$. Vypočítejte délku této tětivy.

* **15.** Mostní kruhový oblouk má výšku $v = 8\,\text{m}$. Oblouk je částí kružnice s poloměrem $r = 29\,\text{m}$. Určete rozpětí tohoto mostního oblouku.

* **16.** V kružnici s poloměrem 7,5 cm jsou sestrojeny dvě rovnoběžné tětivy, jejichž délky jsou 9 cm a 12 cm. Vypočítejte vzdálenost těchto tětiv.

* **17.** Dřevěná koule s poloměrem 12,0 mm plove ve vodě tak, že je ponořena do $\frac{2}{3}$ svého průměru. Určete poloměr kružnice, která je průnikem roviny hladiny vody s povrchem koule.

18. Určete druhou mocninu čísel:

a) 26	−48	128	−365
b) 0,1	−0,4	5,2	−6,6
c) 0,25	−0,42	0,07	−0,09
d) 0,002	−0,005	0,112	−0,234
e) $\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{5}{7}$

19. S přesností na desetiny vypočítejte druhou mocninu čísel:

a) 4,29	42,9	−3,67	−36,7
b) 484,72	162,313	−683,47	−234,562

20. S přesností na setiny vypočítejte druhou mocninu čísel:

a) 7,39	25,25	−8,14	−36,72
b) 56,23	27,326	−15,36	−85,659

21. Vypočítejte:

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{7}{10}\right)^2$

c) $0{,}8^2 - 0{,}6^2 - (-0{,}2)^2$ d) $-0{,}3^2 + (-0{,}3)^2 - (-0{,}3)^2$

e) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (-0{,}8)^2 - (-2)^2$ f) $-0{,}8^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + (-3)^2$

22. Vypočítejte:

a) $\left(\frac{13}{17}\right)^2 - \left(-\frac{13}{17}\right)^2 + \left(\frac{-13}{17}\right)^2$ b) $\frac{3^2}{11} - \left(\frac{3}{11}\right)^2 + \left(\frac{3}{-11}\right)^2$

23. Vypočítejte:

a) $(11 \cdot 7)^2$ b) $[11 \cdot (-7)]^2$ c) $(-11) \cdot (-7)^2$

d) $5^2 \cdot 13^2$ e) $(5 \cdot 13)^2$ f) $(-5)^2 \cdot (-13)^2$

24. Vypočítejte:

a) $0{,}8^2 + (-0{,}6)^2$ b) $(0{,}8 - 0{,}6)^2$ c) $(-0{,}8)^2 - (0{,}6)^2$

d) $(-0{,}8)^2 + 0{,}6^2$ e) $-0{,}8^2 + 0{,}6^2$ f) $-0{,}8^2 - 0{,}6^2$

25. Vypočítejte:

a) $\frac{7^2 + 3^2}{2 \cdot 5^2}$ b) $\frac{(7+3)^2}{(2 \cdot 5)^2}$ c) $\frac{7^2 - 3^2}{(5-2)^2}$

d) $\frac{3^2 - 7^2}{(2-5)^2}$ e) $\frac{[3 \cdot (-7)]^2}{(2+5)^2}$ f) $\frac{-3^2 - (-7)^2}{(-2)^2 - 5^2}$

26. Pro $a = 8$, $b = -6$ vypočítejte hodnotu výrazu:

a) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ b) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ c) $\frac{4a^2 - 3b^2}{a^2 b - ab^2}$

27. Určete druhou odmocninu z čísel:

a) 289	169	4 225	29 929
b) $\frac{49}{784}$	$\frac{441}{3\,969}$	$\frac{289}{529}$	$\frac{361}{729}$
c) $\frac{1\,728}{12}$	$\frac{5\,832}{18}$	$\frac{4\,096}{4}$	$\frac{512}{32}$

28. Určete druhou odmocninu z daných čísel s přesností na dvě desetinná místa:

a) 8,82	88,2	882	8 820
b) 3,14	31,4	314	3 140

29. Určete druhou odmocninu z čísel:

a) $289 \cdot 529$ b) $289 + 529$ c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{343}{27}$ d) $\frac{4}{9} + \frac{25}{16}$

30. Vypočítejte:

a) $3\sqrt{1\,600 + 81} - 3(\sqrt{1\,600} + \sqrt{81})$

b) $\sqrt{20^2 + 21^2} - (\sqrt{20^2} + \sqrt{21^2})$

31. Vypočítejte:

a) $\sqrt{256} \cdot \sqrt{0{,}04} \cdot \sqrt{1{,}96}$ b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{10}$

c) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ d) $\sqrt{0{,}08} \cdot \sqrt{75} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$

32. Pro $a = 4$, $b = -3$ vypočítejte hodnotu výrazu:

a) $\sqrt{a^2 + b^2}$ b) $\sqrt{(a+b)^2}$
c) $\sqrt{(a-b)^2}$ d) $\sqrt{(b-a)^2}$
e) $\sqrt{(a+9)^2 - (b-9)^2}$ f) $\sqrt{(a+9)^2} - \sqrt{(b-9)^2}$

33. Vypočítejte objem hranolu se čtvercovou podstavou. Délka podstavné hrany je 16,6 cm, délka boční hrany je 17,5 cm.

34. Určete obsah čtverce, který je a) opsán, b) vepsán kružnici s poloměrem 4,34 cm.

35. Určete obsah kruhu, který je a) vepsán, b) opsán čtverci s délkou strany 6,32 cm.

36. Zahrada tvaru čtverce má výměru 537 m^2. Kolik metrů pletiva je třeba k oplocení zahrady? Výsledek zaokrouhlete na metry.

37. Obdélníkový pozemek s rozměry 14 m a 56 m byl vyměněn za čtvercový pozemek o stejné výměře.

a) Vypočítejte délku strany čtvercového pozemku.
b) Porovnejte pomocí rozdílu a podílu obvody těchto pozemků.

38. Rozhodněte, zda trojúhelník se stranami daných délek je pravoúhlý:

a) 21 cm, 28 cm, 35 cm b) 20 cm, 21 cm, 29 cm
c) 41 cm, 40 cm, 9 cm d) 51 cm, 44 cm, 24 cm
e) 16,8 cm, 17,5 cm, 4,9 cm f) 13,9 cm, 20,3 cm, 14,7 cm
g) 14,8 cm, 0,185 m, 111 mm h) 1 600 mm, 232 cm, 1,68 m

39. Vypočítejte obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna má délku 10 cm a rameno je o 3 cm delší než základna.

* **40.** V kosočtverci $ABCD$ je dáno $|AB| = 8{,}0$ cm, $\alpha = 60°$. Vypočítejte délky obou úhlopříček.

41. Kosočtverec má stranu délky $a = 45{,}0$ cm a úhlopříčku délky $e = 80{,}0$ m. Vypočítejte délku druhé úhlopříčky.

42. Vypočítejte délku strany kosočtverce, jehož úhlopříčky mají délky $e = 96$ cm, $f = 40$ cm.

* **43.** V kosočtverci je dáno $a = 160$ cm, $\alpha = 60°$. Vypočítejte délky jeho úhlopříček.

44. V trojúhelníku ABC je dáno $a = 10{,}0$ cm, $t_a = 13{,}0$ cm, $\gamma = 90°$. Vypočítejte délku těžnice t_b.

45. Pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnou délky $a = 36$ cm má obsah $S = 540$ cm^2. Vypočítejte délku odvěsny b a těžnice t_b.

46. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku ABC mají délky $a = 10$ cm, $b = 24$ cm. Vypočítejte délku těžnice t_c.

47. Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny mají délky $a = 40$ cm, $c = 15$ cm a rameno má délku $b = 19{,}5$ cm.

* **48.** Je dán čtverec $ABCD$ s délkou strany 100 mm. Vypočítejte poloměr kružnice, která prochází vrcholy B, C a středem strany AD.

49. Vypočítejte délku tělesové úhlopříčky krychle s hranou délky 8 cm.

50. Kvádr má rozměry $a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $c = 36$ cm. Vypočítejte délku tělesové úhlopříčky kvádru.

51. Kvádr s obdélníkovou podstavou o rozměrech 2,1 cm a 2,8 cm má tělesovou úhlopříčku délky 9,1 cm. Vypočítejte výšku kvádru.

52. Vypočítejte obsah štítu domu, který má tvar rovnoramenného trojúhelníku se základnou délky 12 m a rameny délek 7,5 m.

53. Žebřík délky 8 m je opřen o zeď tak, že spodní konec žebříku je od zdi vzdálen 1,6 m. Do jaké výšky na zdi sahá horní konec žebříku?

54. Z křižovatky dvou přímých navzájem kolmých silnic vyjíždí ve stejném okamžiku osobní a nákladní auto. Osobní auto jede po první silnici průměrnou rychlostí $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, nákladní auto jede po druhé silnici průměrnou rychlostí $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Určete vzdálenost aut za 12 minut.

* **55.** Dvě silnice spolu svírají pravý úhel. Na jedné silnici je 5 km od křižovatky místo P, na druhé silnici je 12 km od křižovatky místo R. Místa P a R jsou spojena přímou pěšinou. Chodec jde z místa R do místa P pěšinou průměrnou rychlostí $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, auto jede z místa R do P po silnicích průměrnou rychlostí $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Určete, za jak

dlouho po příjezdu auta do místa P dorazí chodec, jestliže auto i chodec z místa R vyrazili současně.

* **56.** K letišti letí dvě letadla. V určitém okamžiku je první letadlo vzdáleno od letiště 98 km a druhé 138 km. První letadlo letí průměrnou rychlostí $420\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, druhé průměrnou rychlostí $360\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, přitom dráhy obou letadel jsou navzájem kolmé. Jaká bude vzdálenost letadel za 9 minut?

57. Na těleso působí v témže bodě dvě síly $F_1 = 120\,\text{N}$, $F_2 = 50\,\text{N}$, které svírají úhel velikosti 90°. Určete graficky i početně velikost výslednice těchto sil.

58. Na těleso působí v témže bodě dvě síly $F_1 = F_2 = 400\,\text{N}$, které svírají úhel velikosti 60°. Určete graficky i početně velikost výslednice těchto sil.

59. Z kmene, jehož průměr na užším konci je 28,0 cm, se má vytesat trám čtvercového průřezu. Vypočítejte délku strany největšího možného čtvercového průřezu. Vzhledem k praxi zaokrouhlete výsledek dolů.

6 MOCNINY S PŘIROZENÝM MOCNITELEM A MOCNITELEM NULA

Úlohy

1. Rozhodněte, zda platí:

a) $\left(\frac{1}{8}\right)^{45} > 0$ b) $(-5)^{28} < 0$ c) $(-3)^{33} > 0$

d) $\left(-\frac{1}{7}\right)^{22} > 0$ e) $(-5)^{17} \cdot (-4)^{22} > 0$ f) $(-6)^{20} \cdot 0^{13} < 0$

2. Vypočítejte:

a) $\left(\frac{2}{3} \cdot 1{,}5 - 2\right)^{40}$ b) $(2^2 \cdot 6 - 3 \cdot 2^3)^{47}$

3. Ve tvaru mocniny se základem 0,1 zapište:

a) jednu setinu b) jednu desetitisícinu
c) jednu milióntinu d) jednu desetimilióntinu

4. Dané údaje vyjádřete v jednotkách uvedených v závorce a zapište je ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, $n \in \mathbb{N}$:

a) 5 m (cm), 10 m (mm), 370 km (m)
b) 23 m^2 (cm^2), 610 ha (m^2), 820 km^2 (ha)
c) 36 m^3 (cm^3), 56 l (cm^3), 250 hl (m^3)

Příklad 1

Vypočítejte:

a) $5a^3b^2 \cdot 4ab^3$ b) $12x^5y^3z^2 : 3x^2y^3z^4$

Řešení

a) $5a^3b^2 \cdot 4ab^3 = (5 \cdot 4) \cdot (a^3 \cdot a) \cdot (b^2 \cdot b^3) = 20 \cdot a^{3+1} \cdot b^{2+3} = 20a^4b^5$

b) $12x^5y^3z^2 : 3x^2y^3z^4 = (12 : 3) \cdot (x^5 : x^2) \cdot (y^3 : y^3) \cdot (z^2 : z^4) =$
$4 \cdot x^{5-2} \cdot y^{3-3} \cdot \frac{1}{z^{4-2}} = 4 \cdot x^3 \cdot y^0 \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{4x^3}{z^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$

Úlohy

5. Vynásobte:

a) $3a^2b^5 \cdot (-7ab^3)$ b) $0{,}2ab^3c^2 \cdot 5a^2bc^3$

c) $(-4x^2) \cdot (-5x^2y) \cdot 0{,}6xy^3$ d) $\left(-\frac{2}{3}x\right) \cdot (-0{,}9x^2y) \cdot (-5y^3)$

6. Za předpokladu, že x, y, z jsou nenulová reálná čísla, vydělte:

a) $21x^5y^3 : 7xy^2$ b) $0{,}3x^3y^4 : 1{,}2x^3y^2$

c) $4x^4y^5z^6 : (-0{,}2xy^5z^8)$ d) $12x^2y^3z^0 : \left(-\frac{3}{5}x^2y^2z^2\right)$

Příklad 2

Umocněte:

a) $(2xy^2)^4$ b) $\left(\frac{3x^2y^3}{z}\right)^3$

Řešení

a) $(2xy^2)^4 = 2^4 \cdot x^4 \cdot (y^2)^4 = 16x^4 \cdot y^{2\cdot 4} = 16x^4y^8$

b) $\left(\frac{3x^2y^3}{z}\right)^3 = \frac{3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (y^3)^3}{z^3} = \frac{27 \cdot x^{2\cdot 3} \cdot y^{3\cdot 3}}{z^3} = \frac{27x^6y^9}{z^3}$,

$z \neq 0$

Úlohy

7. Umocněte:

a) $(4xy^3)^3$ b) $(-3a^2bc^3)^4$ c) $(u^2v^3)^n$

d) $\left(-\frac{2m^2n}{3}\right)^3$ e) $\left(\frac{-r^2s^3}{2t}\right)^5$ f) $\left(6k^3 \cdot \frac{1}{2k}\right)^3$

8. Vypočítejte:

a) $(2x^2y \cdot 6xy^3)^2$ b) $\left[(2ab^3)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}a^2b\right)^2\right]^3$

c) $\left[r^5 \cdot \left(\frac{2s}{r^2}\right)^2\right]^3$ d) $\left[u^4 \cdot \left(-\frac{2v}{u}\right)^3\right]^2$

9. Vypočítejte:

a) $9x^5(y-1)^2 : 6x^2(y-1)$ b) $4a^3(a-b)^3 : 8a^5(a-b)$

10. Vypočítejte:

a) $24xy^2z^3 \cdot 6x^2y^3z^5 : 9x^3y^4z^2$

b) $(2ab^2c^3)^3 \cdot 3a^4b^3c^2 : 6a^7b^8c^6$

c) $0{,}4x^5y^2z^3 \cdot (0{,}1xy^2z^4)^2 : 0{,}04x^8y^6z^5$

d) $0{,}2a^3b^2c^6 \cdot (-2{,}5ab^4c) : \left(-\frac{1}{2}ab^3c^4\right)^2$

11. Počet baktérií se dělením vždy za 1 hodinu zdvojnásobí. Vypočítejte, kolik baktérií vznikne z jedné baktérie za 24 hodin.

Úlohy

1. Zapište výrazy a určete jejich hodnotu:
a) součin součtu čísel 2 a 7 a rozdílu čísel 45 a 40
b) podíl rozdílu čísel 37 a 19 a součtu čísel 4 a 5

2. Které hodnoty daných číselných výrazů se sobě rovnají?
a) $42:7$ b) $(12-8)\cdot 0{,}5+4$ c) $5\cdot 4:2$ d) $1{,}5\cdot 4$

3. Určete hodnotu číselného výrazu:
a) $(5{,}8+4-6{,}4:0{,}8)\cdot 3{,}5$
b) $\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right)$
c) $5{,}5:0{,}5-\left(\frac{3}{4}+7:4\right)-(-3)^2$
d) $(-3)\cdot(-2)^3-(4{,}5+3:2)\cdot 2$

4. Určete počet členů následujících výrazů:
a) $\frac{3}{7}z-2s$ b) $0{,}5x$ c) $5a-\frac{b}{3}+8$

5. Zapište jako výraz (neupravujte):
a) součet dvojnásobku čísla x a čísla 5
b) dvojnásobek součtu čísla x a čísla 5
c) druhou mocninu rozdílu čísel m a n
d) rozdíl druhých mocnin čísel m a n
e) součin čísel $2r$ a $7s$ zmenšený o jejich rozdíl

6. Napište číslo, které je
a) o 5 menší než číslo x,
b) o x menší než číslo 5,
c) o x větší než číslo y,
d) třikrát větší než číslo m,
e) o n větší než čtyřnásobek čísla m.

Příklad 1

Do jazykového kursu angličtiny se přihlásilo m žen a mužů o n méně než žen. Kolik osob se zúčastnilo kursu, jestliže chyběli 3 muži a 2 ženy?

Řešení

počet přihlášených žen	m
počet přihlášených mužů	$m-n$
počet přítomných žen	$m-2$
počet přítomných mužů	$m-n-3$
počet přítomných osob	$(m-2)+(m-n-3)=2m-n-5$

Kursu se zúčastnilo $(2m-n-5)$ osob.

Úlohy

7. Ve třídě je d dívek a chlapců je o 2 méně než dívek. Kolik je ve třídě žáků, chybějí-li 2 dívky a 1 chlapec?

8. Krabička se šesti kusy mýdla stojí v Kč. Kolik korun stojí 5 kusů mýdla?

9. Ve voze metra může jet a lidí sedících a k lidí stojících. Kolik lidí může jet ve vlaku metra o šesti vozech?

10. Rychlík jede průměrnou rychlostí b kilometrů za hodinu. Jakou dráhu ujede za 17 minut?

11. Auto ujelo za 3 hodiny a km. Kolik kilometrů auto ujede stejnou rychlostí za 4 hodiny?

12. Auto spotřebuje m litrů benzínu na s kilometrů. Kolik litrů benzínu spotřebuje na 100 km?

13. Anička koupila 3 kg mouky, 2 kg cukru a za 3 Kč rohlíky. 1 kg mouky stojí a Kč, 1 kg cukru stojí b Kč. Kolik korun dostala nazpět, platila-li stokorunou?

14. Hřiště tvaru obdélníku má rozměry a metrů a b metrů. Na $\frac{1}{3}$ plochy je trávník. Určete obsah nezatravněné plochy.

15. Na stěně a metrů dlouhé a v metrů vysoké jsou dveře b centimetrů vysoké a d centimetrů široké. Určete obsah plochy stěny.

16. Výdaje na společný zájezd a žáků činily: jízdné j Kč, stravné s Kč, tři noclehy po n Kč a drobná vydání d Kč. Vyjádřete částku c, kterou zaplatil každý žák.

17. Cenu k obleku snížili o p procent. Jaká byla nová cena obleku?

18. Na prvním stroji se za a hodin vyrobilo k výrobků. Na druhém, výkonnějším stroji se za tutéž dobu vyrobilo o 32 výrobků více. Kolik výrobků se vyrobilo na obou strojích dohromady za 3 hodiny?

* **19.** Třída, ve které je n žáků, se rozhodla, že každý žák odpracuje t hodin na úpravě sadu před školou. Před zahájením práce přibyl do třídy další žák, který spolužákům nabídl, že jim pomůže splnit závazek.

a) Kolik hodin musel potom odpracovat každý žák?

b) O kolik hodin se každému žákovi snížil závazek?

* **20.** První natěrač natřel za 1 hodinu s metrů plotu, druhý natěrač natřel za tutéž dobu o 1,5 m plotu méně. Druhý natěrač pracoval t hodin, první o 2 hodiny méně než druhý. Kolik metrů plotu natřeli oba dohromady?

Příklad 2

Zjistěte, zda výraz $\dfrac{5x - x^2}{7}$ má pro $x = -2$ a pro $x = 3$ stejnou hodnotu jako výraz $\dfrac{-6 - x}{2}$.

Řešení

Určíme hodnotu obou výrazů pro $x = -2$:

$$\frac{5x - x^2}{7} = \frac{5 \cdot (-2) - (-2)^2}{7} = \frac{-10 - 4}{7} = \frac{-14}{7} = -2$$

$$\frac{-6 - x}{2} = \frac{-6 - (-2)}{2} = \frac{-6 + 2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Určíme hodnotu obou výrazů pro $x = 3$:

$$\frac{5x - x^2}{7} = \frac{5 \cdot 3 - 3^2}{7} = \frac{15 - 9}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{-6 - x}{2} = \frac{-6 - 3}{2} = -\frac{9}{2}$$

Pro $x = -2$ mají výrazy stejnou hodnotu, pro $x = 3$ nemají stejnou hodnotu. Z toho vyplývá, že dané výrazy se nerovnají.

Úlohy

21. Určete hodnotu výrazu $(3x - 2)x$ pro $x = 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ -3$.

22. Určete hodnotu výrazu:

a) $\dfrac{2x - 1}{3} - \dfrac{4 - x}{2}$ pro $x = 4;\ 0;\ -2;\ \dfrac{1}{2}$

b) $5(2x - 3) + 4(x^2 - 9)$ pro $x = 3;\ -1;\ -3;\ \dfrac{1}{2}$

c) $3(2 - 3x) - 4(1 - x^2)$ pro $x = 3;\ -2;\ -1;\ -\dfrac{1}{2}$

23. Zjistěte, zda výraz $\dfrac{x(4 - x^2)}{5}$ má pro $x = -3$ stejnou hodnotu jako výraz $\dfrac{4x^2 - x}{3}$.

24. Zjistěte, zda číslo 0,5 je řešením rovnice:

a) $4x - 5(x - 3) = 2(8x + 3) + \dfrac{1}{2}$

b) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

c) $3(x^2 - 4) = x^2 + 2x - 1$

d) $\left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)(2x - 1) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

Příklad 3

Zjednodušte výraz $2x^2 + 3x - x^2 - 6x + 3 - x^2 + 5$ a správnost výpočtu ověřte dosazením $x = -2$.

Řešení

$2x^2 + 3x - x^2 - 6x + 3 - x^2 + 5 = (2x^2 - x^2 - x^2) + (3x - 6x) +$
$+ (3 + 5) = -3x + 8$

Určíme hodnotu daného i upraveného výrazu pro $x = -2$:
$2x^2 + 3x - x^2 - 6x + 3 - x^2 + 5 = 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + + 3 - (-2)^2 + 5 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) - 4 - 6 \cdot (-2) + 3 - 4 + 5 = 8 - 6 - - 4 + 12 + 3 - 4 + 5 = 14$
$-3x + 8 = (-3) \cdot (-2) + 8 = 6 + 8 = 14$
Pro $x = -2$ mají oba výrazy stejnou hodnotu, úprava byla provedena správně.

Úlohy

25. Zjednodušte výraz:
a) $17m - 4{,}5n + 5 - 11{,}4m + 2{,}1n - 6$
b) $\left(\frac{3}{5}x - y\right)2 + \frac{2}{3}y - 0{,}3x + 11$

26. Zjednodušte výraz $3m^2 - 2m^3 + 4m + 12 - m^2 - m^3 + 7 - 3m$ a správnost výpočtu ověřte dosazením $m = 5$.

27. Zjednodušte výraz $7t^3 - 2t^2 - 11t^3 + 3t^2 - 13 - 2t - 2(6 - t)$ a správnost výpočtu ověřte dosazením $t = -2$.

28. Zjednodušte výraz $4k^2 - (2k + 1)^2 - 4(k + 2)$ a správnost výpočtu ověřte dosazením $k = -3$.

29. Zjednodušte výraz $5v^4 - 3v + v^2 - 7v^3 + 4v^2 - 2v - 2v^4 + 1$ a správnost výpočtu ověřte dosazením $v = 2$.

30. Zjednodušte výraz $-5z - 3{,}4 + 2{,}1z^2 - 4{,}5z + 8{,}3z + z^3 - 4{,}2z^2 + 5$ a správnost výpočtu ověřte dosazením $z = 4$.

31. Rozhodněte, které z dvojic výrazů jsou si rovny:
a) $(4 - x)3;\ 12 - 3x$
b) $\frac{3}{8}a;\ a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a$
c) $2a : 4;\ \frac{1}{2}a$
d) $4x - 3 - \frac{1}{2}x;\ \frac{5}{2}x$

32. Do daného výrazu dosaďte $x = 2 + c$, $y = 1 - 2c$ a upravte:
a) $2x - (x - y)$
b) $\frac{x + y}{2} - 5$

33. Do výrazu $2x - 0{,}5y + 1$ dosaďte $x = a + 1$, $y = a - 1$ a takto získaný výraz zjednodušte.

34. Určete hodnotu výrazu $\frac{2z - z^2}{3}$ pro $z = -3;\ -2{,}4;\ -1{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 3$.

35. Určete hodnotu výrazu $\frac{4x^2 - 3x}{5}$ pro $x = -2;\ -1;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 2$.

36. Doplňte tabulku:

y	-7	-5	-2	-1	0	1	3	5	10
$\frac{y^2 - 3y}{2}$									

37. Doplňte tabulku:

a	-4	-1	0	$\frac{3}{5}$	$1{,}2$	$2\frac{1}{3}$	$4{,}6$	7
$\frac{(a - 1)^2}{3}$								

38. Vypočítejte:
a) $(7a - 3b + 2) + (4b - 2a - 1)$
b) $(-2k + 8c - 1) + (2 - 5c) + (9k - 3 + 4c)$
c) $\left(-\frac{2}{5}t + \frac{1}{3}r - 2\right) + \left(5 - \frac{5}{6}r + 0{,}7t\right)$
d) $(5m^2 - 4am + 2a^2) + (3{,}5a^2 + 6am - 2m^2)$

39. Vypočítejte:
a) $(7c - 2a + 5t) - (4a - t + 5c)$
b) $(4{,}3p - 11q + 8{,}1) - (4{,}9q - 1{,}2p + 6{,}4)$
c) $(5h^2 - 7h + 0{,}5) - (2h - 0{,}1)^2$
d) $3(2r^2 - 6r + 0{,}2) - 2(0{,}5r^2 + 2r - 1{,}7)$

40. Vypočítejte:
a) $5t - [2t - (3t + 2) - 1] - (8 - 7t)$
b) $-2x^2 - [5x - (x^2 + 4) + 1] - (x^2 - 3x + 2) + 4x^2 + 8x$
c) $8x - [2x - 3(x - 1)^2 + 2] - (x^2 - 3x)2$
d) $0{,}4m - 2m^2 - [3{,}1 + 5(0{,}5m^2 - m) + 0{,}2m] + 3{,}1$

41. Od trojnásobku výrazu $(4c - 2d + 1)$ odečtěte dvojnásobek výrazu $(7c + d - 5)$.

* **42.** Určete, který výraz musíme přičíst k výrazu $\left(5n - 20 + \frac{2}{3}\right)$, abychom dostali výraz $\left(7{,}4n + 30 - \frac{1}{2}\right)$.

* **43.** Určete výraz, který musíme odečíst od výrazu $\left(\frac{2}{5}k^2 - 2k + 0{,}6\right)$, abychom dostali výraz $(0{,}3k^2 + 0{,}5k - 6{,}3)$.

Příklad 4

Vypočítejte:

a) $(4x^2 - 7x + 9) \cdot (-3x)$
b) $(2x - 3)(3x^2 + 5x - 6)$
c) $(3a + 0{,}2)^2 - \left(2a - \frac{1}{2}\right)^2$

Řešení

a) $(4x^2 - 7x + 9) \cdot (-3x) = -12x^3 + 21x^2 - 27x$
b) $(2x - 3)(3x^2 + 5x - 6) = 6x^3 + 10x^2 - 12x - 9x^2 - 15x + 18 =$
$= 6x^3 + x^2 - 27x + 18$
c) $(3a + 0{,}2)^2 - \left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 = 9a^2 + 1{,}2a + 0{,}04 - \left(4a^2 - 2a + \frac{1}{4}\right) =$
$= 9a^2 + 1{,}2a + 0{,}04 - 4a^2 + 2a - 0{,}25 = 5a^2 + 3{,}2a - 0{,}21$

Úlohy

44. Upravte:

a) $(0{,}5a^2 - 3a - 0{,}25) \cdot (4a)$ b) $(6a^2 - 2ab + 0{,}2ab^2) \cdot (-5a^2b)$

45. Upravte:

a) $(3a + 6)(3 - 8b) + (4a + 2)(6b - 9)$
b) $(18a - 24)(b - 3) - (3a - 4)(6b - 18)$
c) $(8a - 7)(b + 2) + (3 - 2a)(4b - 1) + 17$
d) $(3a - 7)(4b - 5) - (6a - 1)(2b + 9) - (a - 26b)$

46. Upravte:

a) $3x - 4[3x - 4(3x - 4)]$ b) $3x - 4[(3x - 4)3x - 4]$
c) $(3x - 4)[3x - 4(3x - 4)]$ d) $(3x - 4)[(3x - 4)3x - 4]$

47. Umocněte:

a) $(3x + 4)^2$ b) $(7x + 5y)^2$
c) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$ d) $(0{,}1x^2 + 0{,}5)^2$

48. Umocněte:

a) $(-x + 2y)^2$ b) $(5 - 2a)^2$ c) $(-3b - 2)^2$
d) $\left(\frac{3}{2}y - 0{,}6\right)^2$ e) $(2b^2 - 9)$ f) $(-4a^2 - 3b^2)^2$

49. Doplňte chybějící údaje tak, aby platila rovnost:

a) $(a + \square)^2 = \square + 4ab + \square$
b) $(\square - 3v)^2 = 4u^2 - \square + \square$
c) $(\square - 5y)^2 = \square - 30xy + \square$
d) $(\square - \square)^2 = 49m^2 - \square + n^4$

50. Rozhodněte, zda se dané výrazy sobě rovnají:

a) $(2a - 3b)(2a + 3b)$; $4(a - 1)^2 - 9b^2 + 8a - 4$
b) $2a - 3(4b + 1) + 7$; $(2a - 3)(4b + 1) + 7$
c) $(2a - 3) + (4b + 1)$; $(2a + 4b) + (-3 + 1)$
d) $(2a - 3b)^2$; $(3b - 2a)^2$

51. Zjednodušte:

a) $(4 - a)(4 - a)$ b) $(y + a)(y - a) - (y + a)^2$
c) $(3 + y)^2 - (y + 3)^2$ d) $9(m - 2)^2 - 16(2 - m)^2$

Příklad 5

Rozložte na součin výrazy:

a) $18xy^2 - 21x^2y$ b) $3a + 3b + ax + bx$
c) $7r(5v - 3u) + 3u - 5v$ d) $4x^2 - 4xy + y^2$
e) $64a^2b - 16a^2b^3$ f) $(7m - 5)^2 - 9$

Řešení

a) $18xy^2 - 21x^2y = 3xy(6y - 7x)$
b) $3a + 3b + ax + bx = 3(a + b) + x(a + b) = (a + b)(3 + x)$

c) $7r(5v-3u)+3u-5v = 7r(5v-3u)-(5v-3u) =$
$= (5v-3u)(7r-1)$

d) $4x^2-4xy+y^2 = (2x-y)^2 = (2x-y)(2x-y)$

e) $64a^2b-16a^2b^3 = 16a^2b((4-b^2) = 16a^2b(2+b)(2-b)$

f) $(7m-5)^2-9 = (7m-5)^2-3^2 = (7m-5+3)(7m-5-3) =$
$= (7m-2)(7m-8)$

Úlohy

52. Rozložte na součin výrazy:

a) $8xy-12y^2$ b) $-6z^2-9z-12zy$
c) $49a^2b-21ab^2$ d) $65t^2s^3v-91t^3sv^2+39t^4s^2v$

53. Rozložte na součin výrazy:

a) $(3-v)-(v-3)$ b) $5(t-3)+(3-t)$
c) $u(v-1)-v+1$ d) $t(6r-7)+14-12r$

54. Rozložte na součin výrazy:

a) $ax-bx-a+b$ b) r^3-r^2+r-1
c) $7z-21+6b-2bz$ d) $5t-2tm-10m+25$
e) $2nz+ky+kz+2ny$ f) $3ac+2d-3ad-2c$

55. Rozložte na součin výrazy:

a) $49-16x^2$ b) x^4y^2-1
c) $(3a+b)^2-c^2$ d) $(0{,}3-4b)^2-0{,}09$

56. Rozložte na součin výrazy:

a) $u^2-24u+144$ b) $9a^2+42ab+49b^2$
c) $3h^2+30h+75$ d) $5y^4-40y^3+80y^2$

57. Rozložte na součin výrazy:

a) $r^3-7r^2-rs^2+7s^2$ b) x^3-x^2-4x+4

58. Rozložte na součin výrazy:

a) $4m^2k^4-49m^4k^2$ b) $9v^2s^2-4r^2v^2-9u^2s^2+4u^2r^2$

59. Rozložte na součin výrazy:

a) $(3a-1)^2-(2b-5)^2$ b) $(2c+d)^2-(3d-1)^2$

Příklad 6

Určete, pro které hodnoty proměnných mají smysl výrazy:

a) $\dfrac{x+3}{4}$ b) $\dfrac{3x+5}{4x}$ c) $\dfrac{x-21}{3x+5}$

d) $\dfrac{2x-1}{x-3y}$ e) $\dfrac{5x-y}{x^2-6x}$ f) $\dfrac{25x-11}{x^2-6x+9}$

Řešení

Protože dělení nulou není definováno, musíme v lomených výrazech z oboru proměnné vyloučit ta čísla, pro která má výraz ve jmenovateli číselnou hodnotu nula.

a) Jmenovatel výrazu $\dfrac{x+3}{4}$ je číslo různé od nuly, proto má daný výraz smysl pro každé reálné číslo x.

b) $4x \neq 0$, tj. $x \neq 0$.

c) $3x+5 \neq 0$, tj. $x \neq -\dfrac{5}{3}$.

d) $x-3y \neq 0$, tj. $x \neq 3y$.

e) $x^2-6x \neq 0$, tj. $x(x-6) \neq 0$, odtud $x \neq 0$ a $x \neq 6$.

f) $x^2-6x+9 \neq 0$, tj. $(x-3)^2 \neq 0$, odtud $x-3 \neq 0$, tedy $x \neq 3$.

Úlohy

60. Určete, pro které hodnoty proměnné x mají dané výrazy smysl:

a) $\dfrac{3}{x}$ b) $\dfrac{4-x}{5}$ c) $\dfrac{3x-2}{x+6}$

d) $\dfrac{7x-6}{7x+5}$ e) $\dfrac{11-3x}{x^2+9x}$ f) $\dfrac{13}{4x^2-20x+25}$

61. Určete, pro které hodnoty proměnné y mají dané výrazy smysl:

a) $\dfrac{8y-7}{y^2-9}$ b) $\dfrac{26y-17}{9y^2-25}$ c) $\dfrac{7y-35}{4y+8y^2}$

d) $\dfrac{y-1}{8y^3-2y}$ e) $\dfrac{2y-7}{y^2+4}$ f) $\dfrac{9y^2-4}{16y^2+13}$

62. Určete, kdy mají dané výrazy smysl:

a) $\frac{8}{7x^2y}$ b) $\frac{x-y}{x+y}$ c) $\frac{3x-7y}{5x+9y}$

d) $\frac{36x-25y}{9x^2-4y^2}$ e) $\frac{2x-y}{x^2+10xy+25y^2}$ f) $\frac{(x-y)(x+y)}{4x^2-24xy+36y^2}$

63. Vypočítejte hodnotu výrazu $\frac{5-x}{2x}$ pro $x=-3$; $-\frac{5}{4}$; 0; 0,5; 1; 5.

64. Vypočítejte hodnotu výrazu $\frac{25-x^2}{4-x}$ pro $x=-5$; -4; 0; 0,5; 4; 5.

65. Vypočítejte hodnotu výrazu $\frac{-2x+x^3}{x}$ pro $x=-3$; -2; -1; 0; $\frac{1}{2}$; 2; 3.

66. Určete, pro kterou hodnotu proměnné x se daný výraz rovná nule:

a) $\frac{x}{x-1}$ b) $\frac{x-3}{x-7}$ c) $\frac{5x+6}{2x+1}$

d) $\frac{x^2-2x}{16x-9}$ e) $\frac{x^2+4x}{x^2-4x}$ f) $\frac{x^2-16}{x+4}$

Příklad 7

Rozšiřte dané lomené výrazy výrazem uvedeným v závorce:

a) $\frac{x-2}{x-5}$ (-1) b) $\frac{5x}{y}$ $(6x)$

c) $\frac{x+3}{x}$ $(x+3)$ d) $\frac{x-1}{x+1}$ $(x-1)$

Řešení

a) $\frac{x-2}{x-5}=\frac{(x-2)\cdot(-1)}{(x-5)\cdot(-1)}=\frac{2-x}{5-x}$, $x\neq 5$

b) $\frac{5x}{y}=\frac{5x\cdot 6x}{y\cdot 6x}=\frac{30x^2}{6xy}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$

c) $\frac{x+3}{x}=\frac{(x+3)(x+3)}{x(x+3)}=\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}$, $x\neq 0$, $x\neq -3$

d) $\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$, $x\neq -1$, $x\neq 1$

Úlohy

67. Rozšiřte dané lomené výrazy výrazem uvedeným v závorce:

a) $\frac{-x-y}{x-y}$ (-1) b) $\frac{2}{7x}$ (3)

c) $\frac{3x}{4y}$ $(-5x)$ d) $\frac{-7x}{3y}$ $(4xy)$

e) $\frac{x+5}{4x}$ $(x-2)$ f) $\frac{-2x}{x-y}$ $(-x-y)$

68. Rozšiřte lomené výrazy tak, aby se jmenovatel rovnal výrazu uvedenému v závorce:

a) $\frac{2}{13a}$ $(39a)$ b) $\frac{4}{7b}$ $(14ab)$

c) $\frac{2a-9}{3a}$ $(6a^2b)$ d) $\frac{4a}{a+1}$ (a^2+a)

69. Rozšiřte lomené výrazy tak, aby se jmenovatel rovnal výrazu uvedenému v závorce:

a) $\frac{2u-5}{u-2}$ $(2-u)$ b) $\frac{u-2}{u+2}$ (u^2-4)

c) $\frac{-3u}{3-u}$ (u^2-9) d) $\frac{u+5}{u-5}$ $(u^2-10u+25)$

70. Doplňte tak, aby platila rovnost:

a) $\frac{1}{2}=\frac{}{2a+6}$ b) $b-c=\frac{}{b+c}$

c) $\frac{3r}{r-s}=\frac{}{r^2-s^2}$ d) $\frac{-2m}{m-n}=\frac{}{n^2-m^2}$

71. Najděte společný jmenovatel lomených výrazů:

a) $\frac{2}{3x}, \frac{7}{x^2}$ b) $\frac{1}{3x}, \frac{5}{6x^2}, \frac{7}{10x}$

c) $\dfrac{1}{2xy^3}, \dfrac{3}{8x^2y}$ d) $\dfrac{2x}{x-y}, \dfrac{2y}{x+y}$

e) $\dfrac{2x}{3x-5}, \dfrac{7x}{5-3x}$ f) $\dfrac{x-3y}{x+3y}, \dfrac{3xy}{x^2+6xy+9y^2}$

Příklad 8

Kraťte a zapište, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\dfrac{6x^2y}{4xy^2}$ b) $\dfrac{xy-y}{y}$ c) $\dfrac{x^2-xy}{7x-7y}$

d) $\dfrac{1-x}{x-1}$ e) $\dfrac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$ f) $\dfrac{3x^2+12x+12}{6x^2-24}$

Řešení

a) $\dfrac{6x^2y}{4xy^2} = \dfrac{3x \cdot 2xy}{2y \cdot 2xy} = \dfrac{3x}{2y}$, $x \neq 0, y \neq 0$

b) $\dfrac{xy-y}{y} = \dfrac{y(x-1)}{y} = x-1$, $y \neq 0$

c) $\dfrac{x^2-xy}{7x-7y} = \dfrac{x(x-y)}{7(x-y)} = \dfrac{x}{7}$, $x \neq y$

d) $\dfrac{1-x}{x-1} = \dfrac{(-1)\cdot(x-1)}{x-1} = -1$, $x \neq 1$

e) $\dfrac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \dfrac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x+y)} = \dfrac{x-y}{x+y}$, $x \neq -y$

f) $\dfrac{3x^2+12x+12}{6x^2-24} = \dfrac{3(x^2+4x+4)}{6(x^2-4)} = \dfrac{3(x+2)^2}{6(x+2)(x-2)} =$

$= \dfrac{x+2}{2(x-2)}$, $x \neq -2$, $x \neq 2$

Úlohy

72. Kraťte a zapište, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\dfrac{15x^2y}{3xy}$ b) $\dfrac{(4x^2y)^2}{8x^3y}$ c) $\dfrac{xy-y}{xy}$

d) $\dfrac{x-2}{3x-6}$ e) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ f) $\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$

73. Kraťte a zapište, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\dfrac{m^2-16}{m^2-4m}$ b) $\dfrac{m-n}{n-m}$ c) $\dfrac{3n^2-15n}{5-n}$

d) $\dfrac{m^2-9n^2}{2m-6n}$ e) $\dfrac{m^2+6mn+9n^2}{m+3n}$ f) $\dfrac{4m^2-25n^2}{5n-2m}$

74. Zjednodušte:

a) $\dfrac{2a^2+3ab}{6ab+9b^2}$ b) $\dfrac{4a^2-28ab}{2a^2-14ab}$ c) $\dfrac{6a^2+3ab}{a^2+2ab}$

d) $\dfrac{9a^2-4b^2}{9a^2-12ab+4b^2}$ e) $\dfrac{81a^2-1}{27a+3}$ f) $\dfrac{6a^3+48a^2+96a}{3a^2+12a}$

75. Zjednodušte:

a) $\dfrac{(x+3y)^2-y^2}{xy+2y^2}$ b) $\dfrac{x^2+xy-y(3x-y)}{2(x-y)^2}$

Příklad 9

Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\dfrac{1-2x}{3x}\cdot(-6x^2)$ b) $\dfrac{2}{y+z}\cdot(y^2-z^2)$

c) $\dfrac{m-5n}{3m-2n}\cdot(2n-3m)$ d) $\left(\dfrac{1}{r-3s}-\dfrac{3s+r}{9s^2-r^2}\right)\cdot(3s-r)$

Řešení

a) $\dfrac{1-2x}{3x}\cdot(-6x^2) = \dfrac{(1-2x)\cdot(-6x^2)}{3x} = \dfrac{(1-2x)\cdot(-2x)\cdot 3x}{3x} =$

$= (1-2x)\cdot(-2x) = -2x+4x^2 = 4x^2-2x$, $x \neq 0$

b) $\dfrac{2}{y+z}\cdot(y^2-z^2) = \dfrac{2(y+z)(y-z)}{y+z} = 2(y-z)$, $y \neq -z$

c) $\dfrac{m-5n}{3m-2n}\cdot(2n-3m) = \dfrac{(m-5n)(2n-3m)}{3m-2n} =$

$= \dfrac{(m-5n)(2n-3m)}{-(2n-3m)} = \dfrac{m-5n}{-1} = 5n-m$, $n \neq \dfrac{3}{2}m$

d) $\left(\dfrac{1}{r-3s}-\dfrac{3s+r}{9s^2-r^2}\right)\cdot(3s-r)=\dfrac{3s-r}{r-3s}-\dfrac{(3s+r)(3s-r)}{9s^2-r^2}=$

$=\dfrac{-(r-3s)}{r-3s}-\dfrac{(3s+r)(3s-r)}{(3s+r)(3s-r)}=-1-1=-2,\ r\neq 3s,\ r\neq -3s$

Úlohy

76. Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\dfrac{3+5x}{7x}\cdot 21x^2$ b) $\dfrac{1}{3x^2y}\cdot(-6x^2y^2)$

c) $\dfrac{x-1}{x^2-x}\cdot 3x^2$ d) $\dfrac{6x-1}{6x+1}\cdot(12x+2)$

e) $\dfrac{8x+7}{8x-7}\cdot(14-16x)$ f) $\dfrac{x-y}{x^2-4y^2}\cdot(x-2y)$

77. Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

a) $\dfrac{u^3+u^2}{u^2-1}\cdot(u-1)$ b) $\dfrac{18v}{30v+42}\cdot(5v+7)$

*c) $\dfrac{4r^2+28rs+49s^2}{2r+7s}\cdot(2r-7s)$

*d) $\dfrac{p-q}{4p^2-8pq+4q^2}\cdot(4p^2-4pq)$

* **78.** Zjednodušte:

a) $\dfrac{a-2b+1}{(a-2b)^2-1}\cdot(a-2b-1)$ b) $\dfrac{3a+2-b}{4-(3a-b)^2}\cdot(2+b-3a)$

* **79.** Zjednodušte:

a) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\cdot(-1)$ b) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1+x}{x}\right)\cdot(-2x)$

c) $\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot x^2$ d) $\left(\dfrac{xy-y}{y^3x}-\dfrac{2}{xy^2}\right)\cdot(-xy^2)$

e) $\left(\dfrac{x}{x+2y}+\dfrac{x-2y}{x^2-4y^2}\right)\cdot(2y+x)$

f) $\left(\dfrac{2}{3y-x}-\dfrac{x+3y}{x^2-9y^2}\right)\cdot(x-3y)$

8 ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH ROVNIC A JEJICH SOUSTAV

Příklad 1

Řešte rovnici $\dfrac{3x+4}{5}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{2}$ a proveďte zkoušku.

Řešení

Nejprve odstraníme zlomky. Obě strany rovnice vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů, tj. číslem 20:

$$4(3x+4)=5-10x$$

Provedeme naznačené násobení:

$$12x+16=5-10x$$

Dále upravíme tak, aby na levé straně rovnice byly členy s neznámou a na pravé straně rovnice členy bez neznámé.

$$12x+10x=5-16$$

$$22x=-11$$

Rovnici dělíme číslem 22:

$$x=-\frac{11}{22}$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

Zkouška

Zkoušku provedeme tak, že dosadíme číslo $-\dfrac{1}{2}$ za neznámou x zvlášť do levé strany rovnice a zvlášť do pravé strany rovnice a výsledky porovnáme:

$$L=\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)+4}{5}=\frac{-\frac{3}{2}+4}{5}=\frac{\frac{-3+8}{2}}{5}=\frac{\frac{5}{2}}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2},$$

$$P = \frac{1}{4} - \frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ L = P$$

Řešením rovnice je číslo $-\frac{1}{2}$.

Příklad 2

Řešte rovnici $2(1-x) = \frac{1}{3}(11-6x)$ a proveďte zkoušku.

Řešení
Postupujeme stejně jako v předcházejícím příkladě:

$$\begin{aligned} 2(1-x) &= \frac{1}{3}(11-6x) \qquad / \cdot 3 \\ 6(1-x) &= 11-6x \\ 6-6x &= 11-6x \\ 6x-6x &= 11-6 \\ 0 \cdot x &= 5 \end{aligned}$$

Součin nuly a libovolného reálného čísla je vždy roven nule. Neexistuje tedy žádné reálné číslo x, které po vynásobení nulou se rovná pěti. Rovnice *nemá řešení.*
V tomto případě zkoušku neprovádíme. To, že rovnice nemá řešení, můžeme ověřit pro libovolně zvolené číslo. Ověřme např. pro $x = 2$.

$L = 2(1-2) = 2 \cdot (-1) = -2,\ P = \frac{1}{3}(11 - 6 \cdot 2) = \frac{1}{3} \cdot (-1) = -\frac{1}{3}$

$L \neq P$

Poznámka
Výsledek nemusíme ověřovat, není to nutná součást řešení. Navíc je třeba uvědomit si, že i když provedeme ověření pro deset různých čísel a zjistíme, že žádné z nich není řešením rovnice, nedokázali jsme, že rovnice nemá řešení. Ověření bychom museli provést pro všechna reálná čísla, těch je však nekonečně mnoho, a proto takové ověřování nelze provést. Avšak zjistíme-li při ověřování, že jedno číslo je řešením rovnice, stačí to k popření tvrzení, že rovnice nemá řešení.

Příklad 3

Řešte rovnici $x - \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}(5-3x)$ a proveďte zkoušku.

Řešení

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{3} &= 1 - \frac{1}{3}(5-3x) \qquad / \cdot 3 \\ 3x-2 &= 3-(5-3x) \\ 3x-2 &= 3-5+3x \\ 3x-3x &= 3-5+2 \\ 0 \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

Součin nuly a libovolného reálného čísla je vždy roven nule. To znamená, že řešením rovnice je libovolné reálné číslo. Zkoušku v takovém případě nelze provést. Můžeme pouze ověřit, že pro libovolně zvolené reálné číslo dostaneme vždy rovnost $L = P$. Ověřme např. pro $x = -1$:

$L = -1 - \frac{2}{3} = \frac{-3-2}{3} = -\frac{5}{3}$

$P = 1 - \frac{1}{3}\left[5 - 3 \cdot (-1)\right] = 1 - \frac{1}{3}(5+3) = 1 - \frac{8}{3} = \frac{3-8}{3} = -\frac{5}{3}$

$L = P$

Řešením rovnice je libovolné reálné číslo.

Úlohy

1. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:
   a) $3(x-4) - 6(2x-3) = 27 - 2x$
   b) $6(x-5) - 7(3x-2) = 32 - 3x$
   c) $3(5-2x) + 5x = 5 - 3(x-1)$
   d) $3(4x+3) - 5 = 1 - 6(1-x)$
   e) $5(2x-7) - 9 = 4 - 2(3-5x)$
   f) $4(3x-6) - 11 = -21 - 2(7-6x)$
2. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:
   a) $7 - \left[3 - (5-x)\right] = 11 - 5x$
   b) $9 - 2\left[4 - 3(7-2x)\right] = 2(11+x)$

c) $1-5[7+2(3x-1)]=-6(4+5x)$
d) $16-4[9-3(2x-5)]=-4(3-6x)$

3. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\frac{2}{3}(6-x)+1-x=0$

b) $\frac{4}{5}(7-3y)-7+y=0$

c) $\frac{3}{8}(5-2z)-\frac{3}{4}+3z=0$

d) $\frac{5}{12}(3-4u)-\frac{5}{6}+2u=0$

4. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\frac{7}{10}r-\frac{1}{4}r=\frac{1}{3}r+\frac{7}{2}$

b) $\frac{3}{4}s-\frac{5}{6}s=\frac{3}{8}s+\frac{11}{2}$

c) $\frac{1}{3}u+\frac{1}{4}u-\frac{3}{5}u=\frac{1}{2}\left(\frac{u}{6}-3\right)$

d) $\frac{2}{5}v-\frac{4}{3}v+\frac{1}{2}v=\frac{1}{3}\left(\frac{v}{5}-1\right)$

5. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $0{,}3(2+3t)-0{,}5(2t-3)=0$
b) $0{,}6(3+t)-0{,}2(1-t)=0$
c) $3{,}1(2-3s)+5{,}8s=-1{,}3-2(s-1{,}5)$
d) $2{,}5(4-5s)-3{,}3s=-1{,}8-5(3s-1{,}4)$

6. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\frac{x+3}{4}-\frac{x-5}{3}=2$ b) $\frac{x-4}{8}-\frac{x+5}{10}=-1$

c) $\frac{x-3}{4}-\frac{x-7}{5}=\frac{x+5}{20}$ d) $\frac{x-6}{4}-\frac{x-7}{6}=\frac{x-4}{12}$

7. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $9t-\frac{3}{4}(5t-1)=5t+\frac{5}{8}$

b) $3t-\frac{2}{3}(7t-2)=\frac{5}{6}-2t$

c) $-5t-\frac{2}{5}(3-8t)=1-\frac{1}{2}(3t-1)$

d) $-2t-\frac{3}{4}(5-3t)=2-\frac{1}{5}(3t-1)$

8. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\frac{5-x}{3}-\frac{6-4x}{5}=0$ b) $1-\frac{3-x}{4}=\frac{2x-5}{6}$

c) $\frac{2-5x}{2}-\frac{3-7x}{5}=1-\frac{x+6}{10}$

d) $6-\frac{7-3x}{5}=5-\frac{3-7x}{10}-\frac{x+1}{3}$

9. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $(3x-5)(7+4x)=(6x-2)(5+2x)$
b) $(6x-3)(5+4x)=(12x-3)(2x+3)$
c) $(8y-1)(5+2y)=(4y+5)^2$
d) $(9y+2)(4y-8)=(6y-2)^2$

* **10.** Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $(4r-5)(4r+5)=(4r-2)^2-29$

b) $(s-2)^2=(s+1)(s-4)-\frac{3s-6}{2}$

c) $\frac{2u-5}{6}+\frac{6-7u}{8}=\frac{3-u}{3}+\frac{u+3}{4}$

d) $\frac{2u-3}{4}+\frac{4u-8}{3}=\frac{5-u}{6}-\frac{1-3u}{2}$

Příklad 4

Řešte rovnici $\frac{2x-1}{4x-3}=\frac{2}{3}$ a proveďte zkoušku:

Řešení

Jedná se o rovnici s neznámou ve jmenovateli. Proto nejprve určíme podmínku, při které má výraz $\frac{2x-1}{4x-3}$ smysl. Je to pro $4x-3 \neq 0$, odkud dostaneme $x \neq \frac{3}{4}$. Za tohoto předpokladu odstraníme v rovnici zlomky, tj. vynásobíme rovnici nenulovým výrazem $3(4x-3)$:

$$\frac{2x-1}{4x-3} = \frac{2}{3} \qquad / \cdot 3(4x-3)$$

$$3(2x-1) = 2(4x-3)$$

Další postup je obdobný jako v případě 1:

$$6x - 3 = 8x - 6$$

$$6x - 8x = -6 + 3$$

$$-2x = -3 \qquad / : (-2)$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Zkouška

$$L = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} - 1}{4 \cdot \frac{3}{2} - 3} = \frac{3-1}{6-3} = \frac{2}{3},\ P = \frac{2}{3},\ L = P$$

Řešením rovnice je číslo $\frac{3}{2}$.

Příklad 5

Řešte rovnici $\frac{2x-3}{3-2x} + 1 = 0$ a proveďte zkoušku.

Řešení

Jmenovatel zlomku v dané rovnici je různý od nuly, právě tehdy když $3 - 2x \neq 0$, tj. $x \neq \frac{3}{2}$. Za tohoto předpokladu vynásobíme rovnici

výrazem $(3-2x)$:

$$\frac{2x-3}{3-2x} + 1 = 0 \qquad / \cdot (3-2x)$$

$$2x - 3 + 3 - 2x = 0$$

$$0.x = 0$$

Dostali jsme rovnici, jejímž řešením je (jak již víme z příkladu 3) každé reálné číslo. Řešením dané rovnice však je, vzhledem k předpokladu, každé reálné číslo různé od $\frac{3}{2}$.

Správnost výpočtu můžeme pouze ověřit, a to tak, že za x zvolíme libovolné reálné číslo různé od $\frac{3}{2}$. Ověříme např. pro $x = 2$:

$$L = \frac{2 \cdot 2 - 3}{3 - 2 \cdot 2} + 1 = \frac{4-3}{3-4} + 1 = -1 + 1 = 0,\ P = 0,\ L = P$$

Úlohy

11. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{4}{x} = 3$ b) $\frac{2}{x} + 1 = \frac{3}{x} + 4$

c) $\frac{2}{x} + \frac{3}{4x} - \frac{1}{x} = 1$ d) $\frac{2}{x} - \frac{5}{6} = \frac{2}{3x} + \frac{1}{2}$

12. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\frac{x+5}{x-3} = 1$ b) $\frac{x+4}{x-2} = 3$

c) $\frac{2x-3}{6-4x} = -\frac{1}{2}$ d) $\frac{7x-9}{5x-4} = 2$

13. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\frac{3r+1}{2(r-1)} = 2$ b) $\frac{2s-1}{s-4} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{u+1}{-u+1} = -\frac{2}{3}$ d) $\frac{3(v-5)}{2v-3} = \frac{5}{3}$

14. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{2}{t+3}=\dfrac{3}{t-2}$ b) $\dfrac{3}{m-6}=\dfrac{7}{m-9}$

c) $\dfrac{2}{2r-3}=\dfrac{3}{4r-5}$ d) $\dfrac{7}{4p+7}=\dfrac{5}{2p-1}$

15. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{y+1}{y-2}=\dfrac{y-1}{y+2}$ b) $\dfrac{y+22}{y+12}=\dfrac{2y+9}{2y+3}$

c) $\dfrac{2z+3}{2z-1}=\dfrac{2z+1}{2z-3}$ d) $\dfrac{z-3}{2z-5}=-\dfrac{z-4}{1-2z}$

16. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{x+3}{x-1}+\dfrac{x+1}{x-3}=2$ b) $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x+1}{x-2}=2$

c) $\dfrac{\frac{x}{5}-\frac{1}{2}}{x-3}=\dfrac{3}{10}$ d) $\dfrac{\frac{x}{4}-\frac{1}{3}}{x+2}=\dfrac{1}{4}$

* **17.** Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{2-x}{x-3}=\dfrac{5}{x^2-9}$ b) $\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2x-3}{8}$

c) $\dfrac{6(x-4)}{8x-2(3x+4)}=3$ d) $\dfrac{9(2-x)}{7x-4(3x-1)}=2$

Příklad 6

Určete všechna řešení rovnice $2x-y-3=0$, víte-li, že x je celé číslo, pro které platí $-2\leqq x\leqq 2$.

Řešení

Z dané rovnice vyjádříme neznámou y, tzn., že rovnici upravíme na tvar $y=2x-3$. Do takto upravené rovnice dosazujeme postupně všechna celá čísla x, která vyhovují podmínce $-2\leqq x\leqq 2$. Jsou to čísla -2,

-1, 0, 1, 2. Hledaná řešení rovnice zapíšeme přehledně to tabulky

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	-5	-3	-1	1

nebo jako uspořádané dvojice čísel

$$[-2;-7],\ [-1;-5],\ [0;-3],\ [1;-1],\ [2;1].$$

Úlohy

18. Určete všechna řešení rovnice $3x+y-1=0$, víte-li, že x je celé číslo, pro které platí $-3<x\leqq 3$.

19. Určete všechna řešení rovnice $3x+2y-5=0$, víte-li, že x je přirozené číslo menší než 5.

20. Určete všechna řešení rovnice $3(x-4y)+7=5(x-2y)$ za předpokladu, že x je přirozené číslo menší než 4.

21. Rozhodněte, které z uspořádaných dvojic čísel $[-1;-4]$, $[0;-3]$, $[1;1]$, $[2;0{,}5]$, $[3;-2]$, $[5;5]$ jsou řešením rovnice $3x-2y=5$.

22. Rozhodněte, které z uspořádaných dvojic čísel $[1;2]$, $[0;-1]$, $[-1;-3]$, $[2;4{,}5]$, $[3;-3]$, jsou řešením rovnice $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{5}$.

23. Určete alespoň tři uspořádané dvojice čísel, které jsou řešením rovnice $2(x-y)=3(1-x)$.

24. Určete tři uspořádané dvojice čísel, které jsou řešením rovnice:

a) $2x-y=0$ b) $3(x-2y)=x-3$

c) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=1$ d) $1-\dfrac{2x-5}{6}=\dfrac{3-y}{4}$

25. Určete tři uspořádané dvojice čísel, které jsou řešením rovnice:

a) $3(u+2v+1)=5(u+2)$ b) $5\left(1-\dfrac{v}{2}\right)=1-3(v-2u)$

26. Doplňte čísla m, n, p, r tak, aby uspořádané dvojice $[4;m]$, $[-2;n]$, $[p;0]$, $[r;3]$ byly řešením rovnice:

a) $x-y-3=0$ b) $\dfrac{1}{2}x+y=3$

c) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0$ d) $\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=\frac{3}{2}$

27. Kolika různými způsoby je možné zaplatit 31 Kč, použijeme-li pouze pětikorunové a dvoukorunové mince? Určete všechna řešení.

28. Švadlena koupila dva druhy látek. Jeden metr první látky stál 50 Kč, jeden metr druhé látky stál 70 Kč. Určete, kolik metrů kterého druhu švadlena nakoupila, jestliže za obě látky zaplatila celkem 1 540 Kč a látky nakupovala po celých metrech.

29. Prodavačka převzala ze skladu několik pruhovaných a několik bílých košilí v celkové ceně 5 400 Kč. Pruhovaná košile stojí 250 Kč a bílá stojí 300 Kč. Určete, kolik pruhovaných a kolik bílých košil mohla prodavačka převzít.

Příklad 7

Řešte dosazovací metodou soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

$$\frac{x}{2}+2y=3{,}5$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=-1$$

Řešení

Nejprve v soustavě rovnic odstraníme zlomky. První rovnici vynásobíme dvěma a druhou šesti:

$$x+4y=7$$
$$2x+3y=-6$$

Z první rovnice upravené soustavy vyjádříme neznámou x:

$$x=7-4y$$

Získaný výraz dosadíme za neznámou x do druhé rovnice upravené soustavy:

$$2(7-4y)+3y=-6$$

Dostali jsme jednu rovnici s jednou neznámou y. Vyřešíme ji:

$$14-8y+3y=-6$$
$$-5y=-20 \qquad /:(-5)$$
$$y=4$$

Dosadíme $y=4$ do rovnice, vyjadřující neznámou x, tj. do rovnice $x=7-4y$, a dostaneme:

$$x=7-4\cdot 4$$
$$x=-9$$

Zkouškou se přesvědčíme, zda uspořádaná dvojice čísel $[-9;4]$ je řešením dané soustavy rovnic.

Zkouška

$L_1=\frac{-9}{2}+2\cdot 4=-4{,}5+8=3{,}5,\ P_1=3{,}5,\ L_1=P_1$

$L_2=\frac{-9}{3}+\frac{4}{2}=-3+2=-1,\ P_2=-1,\ L_2=P_2$

Řešením dané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[-9;4]$.

Příklad 8

Řešte soustavu rovnic danou v příkladě 7 sčítací metodou.

Řešení

Stejně jako v příkladě 7 odstraníme v dané soustavě zlomky a dostaneme:

$$x+4y=7$$
$$2x+3y=-6$$

1. První rovnici vynásobíme (-2), druhou opíšeme:

$$-2x-8y=-14$$
$$2x+3y=-6$$

Rovnice sečteme:

$$-5y=-20$$

Vypočítáme y:

$$y = 4$$

2. První rovnici vynásobíme 3 a druhou (-4):

$$3x + 12y = 21$$
$$-8x - 12y = 24$$

Rovnice sečteme:

$$-5x = 45$$

Odtud:

$$x = -9$$

Zkoušku provedeme stejným způsobem jako v příkladě 7.

Příklad 9

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

$$4x + 7y = -2$$
$$2x - 9y = 24$$

Řešení

Při řešení soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými často kombinujeme oba předchozí způsoby řešení. V tomto příkladě nejprve použijeme sčítací metodu; první rovnici opíšeme a druhou vynásobíme (-2):

$$4x + 7y = -2$$
$$-4x + 18y = -48$$

Rovnice sečteme a vypočítáme y:

$$25y = -50 \qquad / : 25$$
$$y = -2$$

Nyní dosadíme $y = -2$ do jedné rovnice dané soustavy, např. do rovnice první, a vypočítáme x:

$$4x + 7 \cdot (-2) = -2$$
$$4x = 12$$
$$x = 3$$

Zkouška

$L_1 = 4 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) = 12 - 14 = -2$, $P_1 = -2$, $L_1 = P_1$

$L_2 = 2 \cdot 3 - 9 \cdot (-2) = 6 + 18 = 24$, $P_2 = 24$, $L_2 = P_2$

Řešením dané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[3; -2]$.

Příklad 10

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

$$2x - y = -1{,}5$$
$$5(x - y) + 4x = y - 3(3 + x)$$

Řešení

Z první rovnice vyjádříme y:

$$y = 2x + 1{,}5$$

V druhé rovnici provedeme naznačené násobení a rovnici upravíme tak, že členy s neznámou převedeme na levou stranu rovnice a ostatní členy na pravou stranu:

$$5x - 5y + 4x = y - 9 - 3x$$
$$12x - 6y = -9 \qquad / : 3$$
$$4x - 2y = -3$$

Do takto upravené rovnice dosadíme $y = 2x + 1{,}5$ a dostaneme:

$$4x - 2(2x + 1{,}5) = -3$$
$$4x - 4x - 3 = -3$$
$$0 \cdot x = 0$$

Řešením rovnice $0 \cdot x = 0$ je každé reálné číslo. Daná soustava rovnic má tedy nekonečně mnoho řešení. Řešením soustavy rovnic je každá uspořádaná dvojice čísel $[x; 2x+1{,}5]$, kde za x můžeme dosadit libovolné reálné číslo.

Zkoušku neprovádíme. Můžeme pouze ověřit správnost výpočtu pro libovolně zvolené reálné číslo x. Ověřme např. pro $x = 2$. Je-li $x = 2$, pak ze vztahu $y = 2x + 1{,}5$ dostaneme $y = 5{,}5$. Zjistíme, zda uspořádaná dvojice $[2; 5{,}5]$ je řešením soustavy.

$L_1 = 2 \cdot 2 - 5{,}5 = 4 - 5{,}5 = -1{,}5$, $P_1 = -1{,}5$; $L_1 = P_1$

$L_2 = 5(2 - 5{,}5) + 4 \cdot 2 = 5 \cdot (-3{,}5) + 8 = -17{,}5 + 8 = -9{,}5$
$P_2 = 5{,}5 - 3(3 + 2) = 5{,}5 - 3 \cdot 5 = 5{,}5 - 15 = -9{,}5$; $L_2 = P_2$

Příklad 11

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

$$\frac{x+2}{y} = 1$$
$$\frac{2x}{y+3} = 2$$

Řešení
V soustavě rovnic je neznámá ve jmenovateli. Nejprve tedy určíme podmínky: $y \neq 0$, $y \neq -3$. Za tohoto předpokladu odstraníme zlomky; první rovnici vynásobíme y, druhou $(y + 3)$:

$$x + 2 = y$$
$$2x = 2y + 6$$

V první rovnici je vyjádřena neznámá y; $y = x + 2$ dosadíme do druhé rovnice a dostaneme:

$$2x = 2(x + 2) + 6$$
$$2x = 2x + 4 + 6$$
$$0 \cdot x = 10$$

Protože rovnice $0 \cdot x = 10$ nemá žádné řešení, nemá žádné řešení ani daná soustava rovnic.
Zkoušku neprovádíme, můžeme pouze ověřit správnost výpočtu tím, že žádná libovolně zvolená uspořádaná dvojice čísel není řešením soustavy rovnic. Ověřme např. pro uspořádanou dvojici $[-2; 1]$:

$$L_1 = \frac{-2+2}{1} = 0,\ P_1 = 1,\ L_1 \neq P_1$$

$$L_2 = \frac{2 \cdot (-2)}{1+3} = \frac{-4}{4} = -1,\ P_2 = 2,\ L_2 \neq P_2$$

Úlohy

30. Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $2x + 3y = -8$
$3x - 2y = 27$

b) $3u - 2v = 1$
$4u - v = -2$

c) $-8a + 2b = 6$
$12a - 3b = -9$

d) $3c - 6d = 9$
$-4c + 8d = 12$

31. Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $2x - 3y = 4$
$3x - 4y = 7$

b) $5x + 2y = 23$
$3x - y = 5$

c) $u - 3v = -1$
$u + 5v = 7$

d) $u + 4v = 3$
$-2u + v = 1$

32. Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $0{,}2x + 0{,}1y = 1{,}1$
$0{,}3x - 0{,}1y = 0{,}9$

b) $0{,}5y - 0{,}3z = 0{,}3$
$0{,}1y + 0{,}2z = 1{,}1$

c) $0{,}1m + 0{,}3n = 0{,}1$
$0{,}3m - 0{,}2n = -0{,}8$

d) $1{,}2r - 0{,}8s = 2{,}4$
$0{,}9r - 0{,}6s = 1{,}8$

33. Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $\frac{x}{5} + \frac{5y}{2} = -4$
$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{y}{4} + \frac{5z}{6} = -17$
$\frac{y}{6} - \frac{3z}{8} = 11$

c) $2u - v = 0$
$\frac{u}{3} + \frac{v}{4} = 1$

d) $3r + 2s = 6$
$\frac{r}{3} + \frac{s}{4} = 1$

* **34.** Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $x - 2y = 0$
$\frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{4}$

b) $8x - 6y = 1$
$\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}(y + 3)$

c) $\frac{u-v}{3} = 3u + 6v - 1$
$2(4u + 5v) = 3(1 - 3v)$

d) $\frac{u}{2} + \frac{v-2}{3} = 0$
$2(u + v) = 3(v + 2) - 1$

35. Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{3x-2y}{2}=6$, $\dfrac{y+8}{x}=2$

b) $2u-3v=5$, $\dfrac{3v+2}{2u}=4$

c) $5r+s=4$, $\dfrac{r-3}{2s}=1$

d) $\dfrac{p+5q}{5}=-1$, $\dfrac{1-p}{q}=-4$

* **36.** Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{x+3}{2y-1}=2$, $3(x-2y)=2(3y+2)$

b) $\dfrac{x-3}{y+1}=\dfrac{2}{3}$, $2(x-y-2)=4-x$

c) $\dfrac{u+1}{v-3}=1$, $\dfrac{u-2}{2v}=2$

d) $\dfrac{2u+5}{3v}=-3$, $\dfrac{2-6v}{4u}=3$

* **37.** Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{5}{y+2}$, $\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{2}{y-5}$

b) $\dfrac{4}{2x+1}=\dfrac{1}{3y-1}$, $\dfrac{3}{4x-3}=\dfrac{5}{6y+1}$

9 SLOVNÍ ÚLOHY, KTERÉ LZE ŘEŠIT JEDNOU LINEÁRNÍ ROVNICÍ S JEDNOU NEZNÁMOU NEBO SOUSTAVOU DVOU LINEÁRNÍCH ROVNIC SE DVĚMA NEZNÁMÝMI

Příklad 1

Během tří dnů navštívilo výstavu celkem 2 870 lidí. Druhý den přišlo na výstavu o 140 lidí více než první den. Třetí den bylo na výstavě 1,5krát více lidí než druhý den. Kolik lidí navštívilo výstavu v jednotlivých dnech?

Řešení

Jako neznámou x označíme počet lidí, kteří navštívili výstavu první den.

Všechny podmínky úlohy vyjádříme pomocí neznámé x:

1. den .... x lidí
2. den .... $(x+140)$ lidí
3. den .... $1{,}5(x+140)$ lidí

celkem .... $[x+(x+140)+1{,}5(x+140)]$ lidí

celkem .... 2 870 lidí

Celkový počet lidí, kteří přišli na výstavu během tří dnů, jsme vyjádřili dvěma výrazy, můžeme tedy sestavit rovnici:

$$x+(x+140)+1{,}5(x+140)=2\,870$$

Řešíme rovnici:

$$\begin{aligned}x+(x+140)+1{,}5(x+140)&=2\,870\\ x+x+140+1{,}5x+210&=2\,870\\ 3{,}5x&=2\,870-140-210\\ 3{,}5x&=2\,520\\ x&=720\end{aligned}$$

Zkouška

První den přišlo na výstavu 720 lidí, druhý den $(720+140)$ lidí $=860$ lidí, třetí den 1,5 krát více než druhý den, tj. $1{,}5\cdot 860$ lidí $=1\,290$ lidí. Za tři dny přišlo celkem $(720+860+1\,290)$ lidí $=2\,870$ lidí, což odpovídá zadání úlohy.

Výstavu navštívilo první den 720 lidí, druhý den 860 lidí a třetí den 1 290 lidí.

Úlohy

1. Zákazník si koupil tričko, vázanku a košili. Nejprve si vybral košili, k ní pak vázanku, která byla třikrát levnější než košile. Nakonec si koupil tričko, které bylo o 70 Kč dražší než vázanka. Celkem zaplatil 470 Kč. Kolik zaplatil za vázanku, kolik za tričko a kolik za košili?
2. Ve třech skladištích bylo uloženo celkem 70 tun obilí. V druhém skladišti bylo uloženo o 8,5 t méně a ve třetím skladišti o 3,5 t více než v prvním skladišti. Kolik tun obilí bylo uloženo v jednotlivých skladištích?
3. Ve škole byla vyhlášena soutěž ve sběru léčivých bylin. Žáci jedné třídy se zaměřili na sběr tří druhů léčivých bylin a přitom každý žák sbíral právě jednu z bylin. Jitrocel kopinatý sbíralo o 2 žáky méně než vlčí mák, heřmánek pravý sbíralo o 4 žáky více než jitrocel kopinatý. Ve třídě bylo celkem 36 žáků. Vypočítejte, kolik žáků sbíralo heřmánek pravý, kolik vlčí mák a kolik jitrocel kopinatý.
4. Obvod trojúhelníku je 90 cm. Strana b je o 3 cm delší než strana a a strana c je o 24 cm kratší než strana b.
   a) Určete délky stran trojúhelníku.
   b) Rozhodněte, zda je tento trojúhelník pravoúhlý.

Příklad 2

Ovocný sad byl vysázen během tří let. Ve druhém roce bylo vysázeno o 15 % více stromků než v prvním roce. Ve třetím roce bylo vysázeno o 40 % méně stromků než v prvním a druhém roce dohromady. Celkem bylo vysázeno 4 128 stromků. Kolik stromků bylo vysázeno v jednotlivých letech?

Řešení

Jako neznámou x označíme počet stromků vysázených v prvním roce.

1. rok .... x stromků

2. rok .... $\left(x + \frac{15}{100}x\right)$ stromků $= 1{,}15x$ stromků

3. rok .... $\left[(x+1{,}15x) - \frac{40}{100}(x+1{,}15x)\right]$ stromků $=$

$= 0{,}60(x + 1{,}15x)$ stromků

celkem .... 4 128 stromků

Celkový počet stromků se rovná součtu stromků vysázených v jednotlivých letech. Sestavíme rovnici:

$$x + 1{,}15x + 0{,}60(x + 1{,}15x) = 4\,128$$
$$2{,}15x + 0{,}6 \cdot 2{,}15x = 4\,128$$
$$1{,}6 \cdot 2{,}15x = 4\,128$$
$$3{,}44x = 4\,128 \qquad / : 3{,}44$$
$$x = 1\,200$$

Zkouška

1. rok .... 1 200 stromků

2. rok .... 1 200 stromků + 15 % z 1 200 stromků =
= (1 200 + 180) stromků = 1 380 stromků

3. rok .... 60 % z (1 200+1 380) stromků =
= 0,6 · 2 580 stromků = 1 548 stromků

celkem .... (1 200 + 1 380 + 1 548) stromků, tj. 4 128 stromků, což odpovídá zadání úlohy

V prvním roce bylo vysázeno 1 200 stromků, v druhém roce 1 380 stromků a ve třetím roce 1 548 stromků.

Úlohy

5. Pracovník zkontroloval během tří dnů 2 950 výrobků. Druhý den zkontroloval o 25 % výrobků více než první den. Třetí den o 15 % výrobků více než druhý den. Kolik výrobků zkontroloval v jednotlivých dnech?
6. Materiál na stavbu byl odvezen třemi různě velikými auty. Hmotnost nákladu na druhém autě byla o 20 % větší než na prvním autě a hmotnost nákladu na třetím autě byla o 20 % větší než na

druhém autě. Na všechna tři auta se naložilo dohromady 18,2 tuny materiálu. Kolik tun materiálu bylo naloženo na každém autě?

7. Tři sourozenci měli našetřeno celkem 1 274 Kč. Petr měl našetřeno o 15 % více než Jirka a Hanka o 10 % méně než Petr. Kolik korun měl našetřeno každý z nich?

* **8.** Dělník během pětidenního pracovního týdne vyrobil 1 120 součástek. První i druhý den splnil denní normu. Třetí den normu překročil o 20 %. Čtvrtý den udělal o 20 % součástek méně než třetí den. Pátý den o 20 % součástek více než třetí den. Kolik součástek musí dělník vyrobit, aby splnil denní normu?

Příklad 3

Z velkoskladu vyjelo nákladní auto průměrnou rychlostí $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Za 1 hodinu 30 minut vyjelo z téhož místa stejným směrem osobní auto průměrnou rychlostí $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od velkoskladu dohoní nákladní auto?

Řešení

1. způsob

Za neznámou x zvolíme číselnou hodnotu doby jízdy osobního auta. Budeme ji určovat v hodinách.

doba jízdy osobního auta	$t_1 \dots x$ h
doba jízdy nákladního auta	$t_2 \dots (x+1{,}5)$ h
průměrná rychlost osobního auta	$v_1 \dots 70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
průměrná rychlost nákladního auta	$v_2 \dots 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
dráha, kterou ujelo osobní auto	$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 70x\,\text{km}$
dráha, kterou ujelo nákladní auto	$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 40(x+1{,}5)\,\text{km}$

V okamžiku, kdy osobní auto dohoní nákladní auto, se obě dráhy rovnají ($s_1 = s_2$), můžeme tedy sestavit rovnici:

$$70x = 40(x+1{,}5)$$

Řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} 70x &= 40(x+1{,}5) \qquad /:10 \\ 7x &= 4(x+1{,}5) \\ 7x &= 4x+6 \\ 3x &= 6 \qquad /:3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Osobní auto dohoní nákladní auto za 2 hodiny. Za tuto dobu při průměrné rychlosti $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ujede dráhu 140 km, což je vzdálenost místa, kde osobní auto dohonilo nákladní auto, od velkoskladu.

Zkouška

Osobní auto jede 2 hodiny, nákladní auto jede 3,5 hodiny. Osobní auto ujede dráhu $s_1 = 70\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2\,\text{h} = 140\,\text{km}$. Nákladní auto ujede dráhu $s_2 = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3{,}5\,\text{h} = 140\,\text{km}$. Délky obou drah se skutečně rovnají.

Osobní auto dohoní nákladní auto za 2 hodiny ve vzdálenosti 140 km od velkoskladu.

2. způsob

Za neznámou y zvolíme číselnou hodnotu hledané vzdálenosti a budeme ji určovat v kilometrech. Vzdálenost místa, kde osobní auto dohoní nákladní auto, od velkoskladu je tedy y km; přitom tato vzdálenost se rovná dráze, kterou ujelo osobní auto, i dráze, kterou ujelo nákladní auto.

dráha, kterou ujelo osobní auto	$s_1 \dots y\,\text{km}$
dráha, kterou ujelo nákladní auto	$s_2 \dots y\,\text{km}$
doba jízdy osobního auta	$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{y\,\text{km}}{70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{y}{70}\,\text{h}$
doba jízdy nákladního auta	$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{y\,\text{km}}{40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{y}{40}\,\text{h}$

Osobní auto vyjelo o 1 hodinu a 30 minut později než nákladní auto. Jinak řečeno, rozdíl mezi dobou jízdy nákladního a osobního auta je 1,5 h. To můžeme vyjádřit rovnicí $t_2 - t_1 = 1{,}5\,\text{h}$, tedy:

$$\frac{y}{40} - \frac{y}{70} = 1{,}5$$

Řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{y}{40} - \frac{y}{70} &= 1{,}5 \qquad / \cdot 280 \\ 7y - 4y &= 420 \\ 3y &= 420 \qquad / : 3 \\ y &= 140 \end{aligned}$$

Osobní auto dohoní nákladní auto ve vzdálenosti 140 km od velkoskladu.

Tuto dráhu ujede za dobu $t_1 = \dfrac{y}{v_1} = \dfrac{140\,\text{km}}{70\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}} = 2\,\text{h}$.

Dále postupujeme stejně jako u 1. způsobu řešení.

3. způsob

Stejně jako v 1. způsobu zvolíme za neznámou x číselnou hodnotu doby jízdy osobního auta, kterou budeme určovat v hodinách.

V okamžiku, kdy osobní auto vyjíždí, je již nákladní auto 1,5 hodiny na cestě, a je tedy ve vzdálenosti $s = v_2 \cdot t_2 = 40\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1{,}5\,\text{h} = 60\,\text{km}$ od velkoskladu. Osobní auto dohání nákladní auto rychlostí $v = v_1 - v_2 = (70 - 40)\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 30\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Náskok nákladního auta, tj. dráhu $s = 60\,\text{km}$, při rychlosti $v = 30\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ urazí za dobu $t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{60\,\text{km}}{30\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}} = 2\,\text{h}$. Další postup řešení je shodný s 1. způsobem.

Úlohy

9. Kamión jede po dálnici z Prahy do Bratislavy průměrnou rychlostí $72\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. V okamžiku, kdy je kamión od Prahy 54 km, vyjíždí z Prahy osobní auto, které jede rovněž do Bratislavy a jehož průměrná rychlost je $90\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Kdy a na kterém kilometru dálnice Praha — Bratislava dohoní osobní auto kamión?

10. Z kasáren vyjela kolona aut jedoucí průměrnou rychlostí $28\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ do vojenského výcvikového prostoru a za 1 hodinu 15 minut vyjelo za kolonou vojenské terénní vozidlo. Jelo průměrnou rychlostí $63\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ a přijelo do výcvikového prostoru současně s kolonou. Určete vzdálenost vojenského výcvikového prostoru od kasáren.

11. V 6 hodin 40 minut vyplul z přístavu parník plující průměrnou rychlostí $12\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Přesně v 10 hodin za ním vyplul motorový člun průměrnou rychlostí $42\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. V kolik hodin dohoní člun parník?

* **12.** Martin byl s kamarády na chalupě v Jizerských horách. Řekl, že vyjdou-li z chalupy přesně v 8 hodin a půjdou-li rychlostí $3\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, přijdou na zastávku autobusu 9 minut po odjezdu autobusu. Půjdou-li však rychlostí $4\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, přijdou na zastávku 6 minut před odjezdem autobusu. Dovedete z těchto údajů vypočítat vzdálenost chalupy od autobusové zastávky a v kolik hodin autobus ze zastávky odjíždí?

Příklad 4

Prvním kombajnem lze sklidit obilí z určitého lánu za 24 hodiny, druhým, výkonnějším kombajnem za 16 hodin. Za kolik hodin bylo sklizeno obilí z tohoto lánu, jestliže se sklízelo současně oběma kombajny, ale druhý kombajn začal pracovat o čtyři hodiny později než první kombajn?

Řešení

Za neznámou zvolíme hledaný počet hodin a označíme ji x.

První kombajn sklidí za 1 hodinu obilí z $\frac{1}{24}$ lánu,

druhý kombajn sklidí za 1 hodinu obilí z $\frac{1}{16}$ lánu.

První kombajn pracuje x hodin,
druhý kombajn pracuje $(x-4)$ hodin.

První kombajn sklidí za x hodin obilí z $\frac{x}{24}$ lánu,

druhý kombajn sklidí za $(x-4)$ hodin obilí z $\frac{x-4}{16}$ lánu.

Oba kombajny sklidí obilí z $\left(\frac{x}{24}+\frac{x-4}{16}\right)$ lánu, což má být celý lán (1 celek).

Sestavíme rovnici:

$$\frac{x}{24}+\frac{x-4}{16}=1$$

Řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{x}{24}+\frac{x-4}{16}&=1 \qquad / \cdot 48 \\ 2x+3x-12&=48 \\ 5x&=60 \qquad / : 5 \\ x&=12 \end{aligned}$$

Zkouška

První kombajn sklidí za 12 hodin obilí z $\frac{12}{24}$ lánu, tj. z $\frac{1}{2}$ lánu. Druhý kombajn sklidí za 8 hodin obilí z $\frac{8}{16}$ lánu, tj. z $\frac{1}{2}$ lánu. Oba dohromady sklidí obilí z $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$ lánu $= 1$ lán, což odpovídá podmínkám úlohy.

Obilí z lánu bylo sklizeno za 12 hodin.

Úlohy

13. Na úseku nově budované silnice pokládají dva stroje různé výkonnosti asfaltový koberec. Položení asfaltového koberce jedním strojem by trvalo 78 hodin, druhým 91 hodin. Jak dlouho bude trvat práce při současném nasazení obou strojů?

14. Vodní nádrž by se naplnila prvním přívodem za 36 minut, druhým za 45 minut. Za jak dlouho se nádrž naplní, přitéká-li voda nejprve 9 minut prvním přívodem a pak oběma současně?

15. Závod A je schopen splnit zakázku za 12 dní, závod B tutéž zakázku za 18 dní. Za kolik dní bude splněna zakázka, jestliže první dva dny na ní pracuje jen závod A, zbývající dny pak oba závody?

16. V tepelné elektrárně je vytvořena určitá zásoba uhlí. Bude-li v činnosti pouze 1. elektrárenský blok, vystačí zásoba uhlí 24 dní. Bude-li v činnosti jen 2. elektrárenský blok, vystačí zásoba 30 dní, a bude-li v činnosti jen 3. elektrárenský blok, vystačí zásoba 20 dní. Určete, na kolik dní vystačí zásoba uhlí, budou-li v činnosti současně všechny tři elektrárenské bloky.

Příklad 5

V balírnách mají připravit směs kávy tak, aby 1 kilogram stál 240 Kč. Na skladě jsou dva druhy kávy v ceně 220 Kč za 1 kg a 300 Kč za 1 kg. Kolik kilogramů každého druhu je třeba smíchat, abychom připravili 50 kg požadované směsi?

Řešení

Zvolíme dvě neznámé. Počet kilogramů levnější kávy označíme x, počet kilogramů dražší kávy označíme y.

hmotnost levnější kávy .... x kg
hmotnost dražší kávy .... y kg
hmotnost obou druhů kávy .... $(x + y)$ kg
hmotnost směsi .... 50 kg

Hmotnost obou druhů kávy se rovná hmotnosti směsi.
Sestavíme první rovnici:

$$x + y = 50$$

cena x kg levnější kávy (220 Kč za 1 kg) .... $220 \cdot x$ Kč
cena y kg dražší kávy (300 Kč za 1 kg) .... $300 \cdot y$ Kč
celková cena obou druhů kávy .... $(220x + 300y)$ Kč
celková cena 50 kg směsi (240 Kč za 1 kg) .... $240 \cdot 50$ Kč

Celkovou cenu jsme vyjádřili dvěma výrazy, dostáváme druhou rovnici:

$$220x + 300y = 240 \cdot 50$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$x + y = 50$$

$$220x + 300y = 240 \cdot 50$$

Z první rovnice vyjádříme x, druhou rovnici dělíme dvaceti:

$$x = 50 - y$$

$$11x + 15y = 12 \cdot 50$$

Dosadíme $x = 50 - y$ do druhé rovnice:

$$11(50 - y) + 15y = 600$$

$$550 - 11y + 15y = 600$$

$$4y = 50$$

$$y = 12{,}5$$

Dosadíme $y = 12{,}5$ do rovnice $x = 50 - y$:

$$x = 50 - 12{,}5$$

$$x = 37{,}5$$

Zkouška

Cena 37,5 kg levnější kávy je $(220 \cdot 37{,}5)$ Kč $= 8\,250$ Kč.
Cena 12,5 kg dražší kávy je $(300 \cdot 12{,}5)$ Kč $= 3\,750$ Kč.
Cena 50 kg směsi je $(8\,250 + 3\,750)$ Kč $= 12\,000$ Kč.
Jeden kilogram směsi stojí $(12\,000 : 50)$ Kč $= 240$ Kč, což odpovídá podmínce úlohy.

K přípravě 50 kg směsi v ceně 240 Kč za 1 kilogram je třeba smíchat 37,5 kg kávy v ceně 220 Kč za 1 kg a 12,5 kg kávy v ceně 300 Kč za 1 kg.

Úlohy

17. Ze dvou druhů čaje v ceně 160 Kč a 220 Kč za 1 kilogram se má připravit 20 kg směsi v ceně 205 Kč za 1 kilogram. Kolik kilogramů každého druhu čaje bude třeba smíchat?

* **18.** Kolik gramů 60%ního roztoku a kolik gramů 35%ního roztoku je třeba k vytvoření 100 gramů 40%ního roztoku?

* **19.** Ředitelství školy na konci školního roku oznámilo, že z 250 dětí, které navštěvují školu, získalo 20 % vyznamenání. Přitom vyznamenání dosáhlo 18 % chlapců a 23 % dívek. Určete, kolik chlapců a kolik dívek navštěvuje tuto školu.

* **20.** Ze dvou kovů s hustotami $7{,}4\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ a $8{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ máme připravit 0,5 kg slitiny s hustotou $7{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Kolik gramů každého kovu je k tomu zapotřebí?

21. Tři zahradnice vysázely za den 3 555 sazenic květáku. První splnila denní normu, druhá vysázela o 120 sazenic více a třetí o 135 sazenic více než první zahradnice. Jaká byla denní norma?

22. Pěti nejúspěšnějším řešitelům matematické olympiády se má rozdělit částka 1 200 Kč tak, aby druhý a každý následující dostal vždy o 50 Kč méně než předcházející. Určete jednotlivé částky.

23. Výměra dvou sousedních parcel je $964\,\text{m}^2$. Výměra druhé parcely je o $77\,\text{m}^2$ menší, než je dvojnásobek výměry první parcely. Určete výměry jednotlivých parcel.

24. Určete součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel takových, že součet prvního a třetího čísla je 368.

25. Součet čtyř po sobě následujících celých čísel, z nichž každé následující je o 5 větší, je 2. Určete tato čísla.

26. Určete čtyři po sobě následující lichá čísla, jejichž součet je 472.

27. Spolužáci K, L, P, T, E vydělali na brigádě celkem 1 345 Kč. Žák K prohlásil: Vydělal jsem o 135 Kč více než L, o 74 Kč více než P, o 98 Kč více než T, ale o 37 Kč méně než E. Kolik korun každý z nich vydělal?

28. V trojúhelníku ABC je velikost vnitřního úhlu β o 8° větší než velikost vnitřního úhlu α a velikost vnitřního úhlu γ je dvakrát větší než velikost úhlu β. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

29. V soutěži na návrh plakátu jsou vypsány tři ceny v celkové částce 11 400 Kč. Druhá cena tvoří dvě třetiny první ceny a třetí cena dvě třetiny druhé ceny. Určete jednotlivé ceny.

30. Metr látky byl zlevněn o 42 Kč, takže 4 m látky za novou cenu byly o 20 Kč levnější než 3 m látky za starou cenu. Jaká byla stará a jaká nová cena 1 m látky?

31. Zvětší-li se délka strany čtverce o její jednu třetinu, zvětší se obvod čtverce o 18 cm. Vypočítejte délku strany čtverce.

32. Dětský bazén se naplní jedním přítokem za 5 hodin, druhým přítokem za 7 hodin. Za kolik hodin se naplní oběma přítoky současně? Výsledek vyjádřete v hodinách a minutách.

33. Pět litrů bílého vína a šest litrů červeného vína stálo 432 Kč. Jeden litr červeného vína je o 6 Kč dražší než 1 litr bílého vína. Kolik korun zaplatíme za 2 litry bílého a 2 litry červeného vína?

* **34.** Do bazénu nateče prvním přítokem za 3 hodiny a druhým přítokem za 4 hodiny celkem 2 150 hl vody. Prvním přítokem za 4 hodiny a druhým přítokem za 2 hodiny by nateklo 1 700 hl vody. Kolik hektolitrů vody nateče prvním přítokem a kolik druhým přítokem za 1 hodinu?

* **35.** Dělníci hloubili jámu. Když pracovali 5 hodin bez rypadla a 3 hodiny s rypadlem, odstranili celkem 60 m^3 zeminy. Když pracovali 2 hodiny bez rypadla a 6 hodin s rypadlem, odstranili celkem 96 m^3 zeminy. Kolik krychlových metrů zeminy odstranili dělníci za 1 hodinu bez rypadla a kolik s rypadlem?

36. V internátu je ve 48 pokojích ubytováno celkem 173 žáků. Některé pokoje jsou třílůžkové, některé čtyřlůžkové. Určete, kolik pokojů je třílůžkových a kolik čtyřlůžkových, jestliže všechny pokoje jsou plně obsazeny.

37. Denní produkce mléka 630 litrů byla k odvozu slita do 22 konví, z nichž některé byly po 25 litrech, jiné po 35 litrech. Všechny konve byly plné. Kolik bylo jednotlivých konví?

38. Pokladník vyplatil 1 390 Kč padesáti bankovkami v hodnotě 20 Kč a 50 Kč. Kolik bylo dvacetikorunových a kolik padesátikorunových bankovek?

* **39.** Jsou dány tři kružnice, z nichž každé dvě mají navzájem vnější dotyk. Poloměr druhé kružnice je o 2 cm menší než poloměr první kružnice. Poloměr třetí kružnice je o 3 cm větší než poloměr druhé kružnice. Středy těchto kružnic tvoří vrcholy trojúhelníku, jehož obvod je 22 cm. Určete délky poloměrů jednotlivých kružnic.

40. Zemědělské družstvo má na $\frac{1}{2}$ výměry obdělávané půdy zasety obiloviny a na $\frac{3}{7}$ výměry má okopaniny. Jaká je výměra družstvem obdělávané půdy, jestliže výměra půdy s obilovinami je o 60 ha větší než výměra půdy s okopaninami?

41. Obdélník má délku o 6 m větší než šířku. Čtverec o straně rovné délce obdélníku má obsah o 78 m^2 větší než obdélník. Určete rozměry obdélníku.

* **42.** V uhelném skladu rozvezli obdrženou zásilku uhlí během tří dnů. První den rozvezli třetinu zásilky, druhý den dvě pětiny ze zbytku a třetí den rozvezli 300 tun uhlí. Kolik tun uhlí rozvezli první den a kolik druhý den?

* **43.** Hmotnost nádoby s vodou je 2,48 kg. Odlijeme-li 75 % vody, má nádoba se zbývající vodou hmotnost 0,98 kg. Určete hmotnost prázdné nádoby. Kolik vody bylo původně v nádobě?

44. Ze dvou druhů čaje v ceně 170 Kč a 210 Kč za 1 kg se má připravit 25 kg směsi v ceně 186 Kč za 1 kg. Kolik kilogramů každého druhu čaje je třeba smíchat?

* **45.** V továrně se vyrábějí dva druhy výrobků. Za jednu směnu se vyrobilo celkem 800 výrobků obou druhů a z toho bylo 1,5 % vadných. Výstupní kontrola zjistila vady u 1 % výrobků 1. druhu a u 1,8 % výrobků 2. druhu. Vypočítejte z těchto údajů, kolik výrobků 1. druhu a kolik výrobků 2. druhu se v továrně za směnu vyrobilo.

* **46.** Dva sesterské závody měly původně dohromady 5 700 zaměstnanců. První závod zvýšil počet zaměstnanců o 40 %, druhý o 20 % a tak nyní mají oba závody celkem 7 650 zaměstnanců. Kolik zaměstnanců má nyní každý závod?

47. Čitatel zlomku je o 4 menší než jmenovatel. Jestliže od čitatele i jmenovatele zlomku odečteme 2, dostaneme $\frac{3}{7}$. Určete původní zlomek.

48. 25 % žáků 8. A mělo v pololetí vyznamenání. Na konci roku k nim přibyli ještě 3 žáci, a tak třídní učitelka mohla prohlásit, že na konci roku prospěla s vyznamenáním třetina žáků třídy. Kolik žáků bylo v této třídě?

* **49.** Ve třech nádobách bylo celkem 22 litrů mléka. V první nádobě bylo o 6 litrů více než ve druhé. Po přelití 5 litrů z první nádoby do třetí je ve druhé a třetí nádobě stejné množství mléka. Kolik litrů mléka bylo původně v první nádobě?

50. Tyč délky 180 cm máme rozřezat na dvě části tak, aby delší část byla o 4 cm kratší než trojnásobek kratší části. Určete délky takto vzniklých částí tyče.

* **51.** Zemědělské družstvo sklidilo 300 t obilí. Z toho bylo 18 t ječmene, pšenice bylo o 250 % více než ovsa a žita bylo o 40 % více než

pšenice. Kolik tun ovsa, kolik tun pšenice a kolik tun žita ZD sklidilo?

* **52.** Sud s pitnou vodou měl hmotnost 64 kg. Když se z něho první den spotřebovalo 28 % vody a druhý den třetina ze zbytku, byla jeho hmotnost 38 kg. Jakou hmotnost má prázdný sud a kolik kilogramů vody v něm původně bylo?

* **53.** Mezi dvěma přístavišti na řece jezdí parník. Cesta tam a zpět mu trvá 3 hodiny 45 minut. Po proudu pluje rychlostí 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a proti proudu rychlostí 8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Vypočítejte vzdálenost mezi přístavišti.

* **54.** Cyklista jel z osady do města. První polovinu cesty, vedoucí převážně do kopce, jel rychlostí 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, druhou polovinu cesty, která převážně klesala, jel rychlostí 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Celá cesta mu trvala 56 minut. Určete vzdálenost osady a města.

* **55.** Auto ujelo vzdálenost mezi městy A a B za 4 hodiny. Kdyby se průměrná rychlost auta zvýšila o 17 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ujelo by auto tuto vzdálenost o hodinu dříve. Určete rychlost auta a vzdálenost mezi městy A a B.

* **56.** Vzdálenost z Prahy do Příbrami je 60 km. Z obou měst vyjela současně proti sobě nákladní auta. Auto z Prahy jelo průměrnou rychlostí o 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ větší než auto z Příbrami, a tak v okamžiku setkání ujelo o 4 km více. Určete průměrnou rychlost jednotlivých aut a dobu, kdy se auta setkala.

57. Dvě letadla startující současně z letišť A a B letí navzájem proti sobě a setkají se za 20 minut. Vzdálenost letišť je 490 km. Průměrná rychlost letadla letícího z letiště A je o 210 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ větší než průměrná rychlost druhého letadla. Vypočítejte průměrné rychlosti obou letadel.

* **58.** Dvě letadla letí z letišť A a B vzdálených 420 km navzájem proti sobě. Letadlo z letiště A odstartovalo o 15 minut později a letí průměrnou rychlostí o 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ větší než letadlo z letiště B. Určete průměrné rychlosti obou letadel, víte-li, že se setkají 30 minut po startu letadla z letiště A.

59. Na dvojkolejné trati mezi stanicemi K a M jely proti sobě dva vlaky. První vlak projel vzdálenost mezi stanicemi za dvě hodiny, druhý, který měl průměrnou rychlost o 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ větší, ji projel za 1,5 hodiny. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic K a M.

* **60.** Parník ujede vzdálenost mezi dvěma přístavy proti proudu řeky za 40 minut a zpáteční cestu po proudu vykoná za 30 minut. Určete rychlost parníku v klidné vodě, je-li rychlost proudu řeky 2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

61. Vodní nádrž se vyprázdní menším čerpadlem za 12 hodin, středním čerpadlem za 9 hodin a velkým čerpadlem za 4 hodiny. Za kolik hodin se vyčerpá vodní nádrž, jsou-li zapnuta současně všechna tři čerpadla?

62. Dělník A by sám provedl výkop pro vodovodní přípojku za 7 hodin, dělník B sám za 6 hodin. Protože výkop má být skončen za 2 hodiny, byl přibrán ještě dělník C. Za jak dlouho by výkop provedl sám dělník C?

63. Pavel zjistil, že průměrná spotřeba jejich osobního auta na 100 km jízdy v městském provozu je 9,4 litru benzínu, mimo město 7 litrů benzínu. Během měsíce května ujeli celkem 800 km a spotřebovali 62 litrů benzínu. Vypočítejte, kolik kilometrů ujeli ve městě a kolik mimo město.

* **64.** V kravíně je celkem 168 krav a telat. Krávy jsou v 9 stájích, telata ve 4 stájích. V každé stáji pro krávy je stejný počet krav a v každé

stáji pro telata je o 3 kusy více než ve stáji pro krávy. Kolik je v kravíně krav a kolik telat?

* **65.** Mezi jednotlivými podlažími domu je 15 schodů. Kdyby byl každý schod o 1,2 cm nižší, bylo by zapotřebí 16 schodů. Určete výšku schodu a výšku domu, víte-li, že má 15 pater.

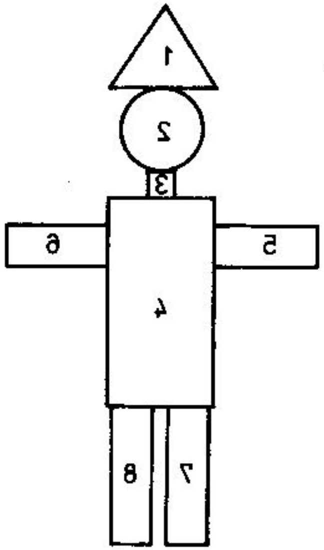
* **66.** Dvě různá nákladní auta by společně navozila stavební materiál za 6 hodin. Po 4 hodinách však bylo první auto převedeno na jinou práci a druhé auto vozilo materiál ještě 6 hodin. Za kolik hodin by stavební materiál navozilo první auto a za kolik hodin druhé auto?

* **67.** V dílně se na šesti strojích stejného výkonu vyrobilo za určitý počet dní 720 součástek. Novým technologickým postupem se denní výkon každého stroje zvýšil o 4 součástky, a tak se nyní vyrobí 720 součástek za tentýž počet dní na pěti strojích. Jaký je nový denní výkon stroje a kolik dní trvá výroba 720 součástek?

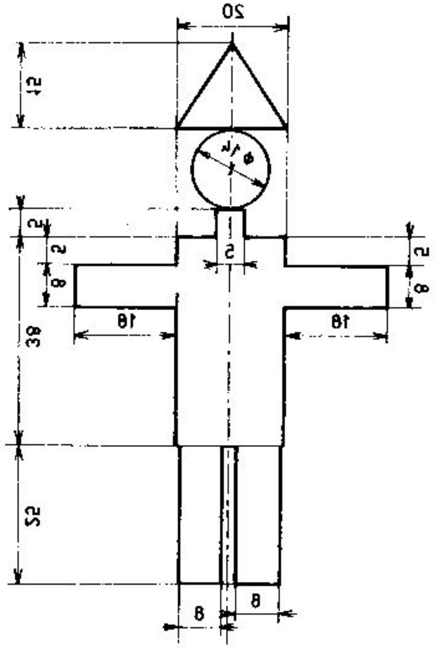
10 OBSAHY A OBVODY OBRAZCŮ

Příklad 1

Vypočítejte obsah obrazce, jehož náčrt je na obr. 10; rozměry jsou uvedeny v mm.



Obr. 10



Obr. 11

Řešení

Obrazec se skládá celkem z osmi různých geometrických útvarů, které si očíslujeme (obr. 11).

1 ... trojúhelník — jeho obsah S_1 se vypočítá podle vzorce $S_1 = \frac{z \cdot v}{2}$

2 ... kruh — jeho obsah S_2 se vypočítá podle vzorce $S_2 = \pi r^2$ nebo $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, kde $r = \frac{d}{2}$

3 ... čtverec — jeho obsah S_3 se vypočítá podle vzorce $S_3 = a^2$

4 ... obdélník — jeho obsah S_4 se vypočítá podle vzorce $S_4 = a \cdot b$

5, 6 ... dva shodné obdélníky — pro jejich obsahy S_5, S_6 platí $S_5 = S_6$

7, 8 ... dva shodné obdélníky — pro jejich obsahy S_7, S_8 platí $S_7 = S_8$

Obsah obrazce S je roven součtu obsahů jednotlivých částí.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8.$$

Potřebné rozměry přečteme z kót na obr. 10. Všechny rozměry jsou uvedeny v milimetrech.

Výpočet

$$S_1 = \frac{z \cdot v}{2}$$
$$S_1 = \frac{20 \cdot 15}{2}$$
$$S_1 = 150$$
$$S_1 = 150\,\mathrm{mm}^2$$

$$S_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$
$$S_2 = \frac{\pi \cdot 14^2}{4}$$
$$S_2 \doteq 154$$
$$S_2 \doteq 154\,\mathrm{mm}^2$$

$$S_3 = a^2$$
$$S_3 = 5^2$$
$$S_3 = 25$$
$$S_3 = 25\,\mathrm{mm}^2$$

$$S_4 = a_1 \cdot b_1$$
$$S_4 = 38 \cdot 20$$
$$S_4 = 760$$
$$S_4 = 760\,\mathrm{mm}^2$$

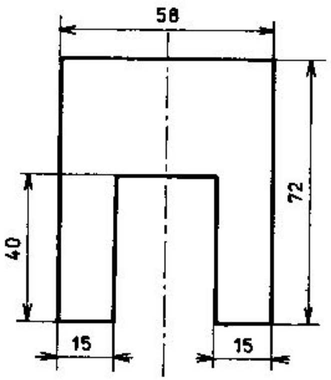
$$S_5 = S_6 = a_2 \cdot b_2$$
$$S_5 = S_6 = 8 \cdot 18$$
$$S_5 = S_6 = 144$$
$$S_5 = S_6 = 144\,\mathrm{mm}^2$$

$$S_7 = S_8 = a_3 \cdot b_3$$
$$S_7 = S_8 = 8 \cdot 25$$
$$S_7 = S_8 = 200$$
$$S_7 = S_8 = 200\,\mathrm{mm}^2$$

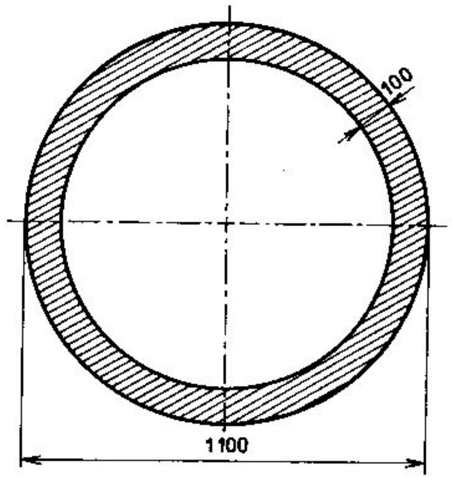
$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8$
$S = (150 + 154 + 25 + 760 + 144 + 144 + 200 + 200)\,\mathrm{mm}^2$
$S = 1\,777\,\mathrm{mm}^2 \doteq 17{,}8\,\mathrm{cm}^2$
Obsah obrazce na obr. 10 je přibližně $17{,}8\,\mathrm{cm}^2$.

Úlohy

1. Vypočítejte obsah a obvod podložky, jejíž rozměry jsou uvedeny v mm na obr. 12.



Obr. 12



Obr. 13

2. Potrubí má vnější průměr 1 100 mm a stěny potrubí mají tloušťku 100 mm. Vypočítejte průřez tohoto potrubí (obr. 13).

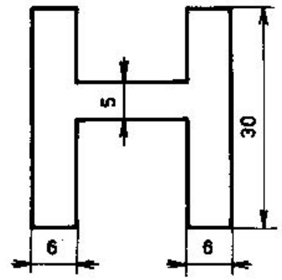
3. Jeden pozemek má tvar obdélníku o rozměrech 220 m a 195 m. Druhý pozemek má tvar čtverce, jehož strana má délku 220 m. Určete, který pozemek je větší a o kolik.

* **4.** Určete obvod pravoúhlého trojúhelníku, jestliže délka jedné odvěsny je 75 % délky druhé odvěsny a jeho obsah je $24\,\mathrm{cm}^2$.

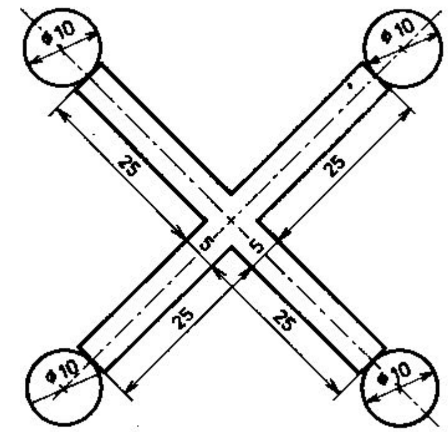
5. Vypočítejte obsah rovnoramenného trojúhelníku, jestliže úhel při základně má velikost 45° a základna má délku 10 cm.

6. Vypočítejte obsah obrazce narýsovaného na obr. 14; jeho rozměry jsou uvedeny v mm.

7. Vypočítejte obsah obrazce narýsovaného na obr. 15; jeho rozměry jsou uvedeny v cm.



Obr. 14



Obr. 15

Příklad 2

Příčný průřez náspu železniční tratě má tvar rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, $|AB| = 15\,\mathrm{m}$, $|CD| = 10{,}5\,\mathrm{m}$, $|BC| = 5\,\mathrm{m}$. Vypočítejte obsah průřezu.

Řešení

Obsah lichoběžníku se vypočítá podle vzorce $S = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \cdot v$.

$z_1 = |AB| = 15\,\mathrm{m}$
$z_2 = |CD| = 10{,}5\,\mathrm{m}$
Výšku lichoběžníku vypočítáme z trojúhelníku AKD (viz obr. 16). Nejdříve určíme délku odvěsny AK:

$$|AK| = (|AB| - |CD|) : 2$$

$$|AK| = (15 - 10{,}5) : 2$$
$$|AK| = 4{,}5 : 2 = 2{,}25$$

$$|AK| = 2{,}25\,\mathrm{m}$$

Obr. 16

Nyní vypočítáme výšku:

$$v^2 = |AD|^2 - |AK|^2$$

$$v^2 = 5^2 - 2{,}25^2$$
$$v^2 = 25 - 5{,}0625$$
$$v^2 \doteq 19{,}94$$
$$v \doteq 4{,}47$$

$$v \doteq 4{,}5\,\mathrm{m}$$

Výška lichoběžníku $ABCD$ je 4,5 m.
Dosadíme do vzorce pro výpočet lichoběžníku

$$S = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v$$

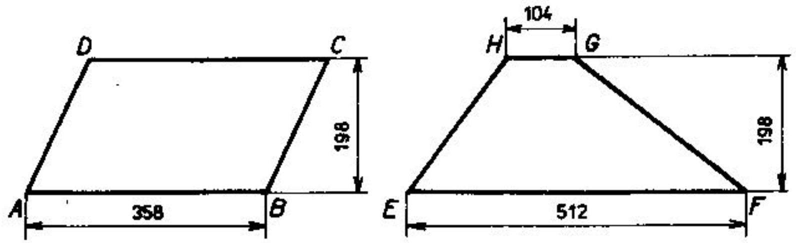
$$S = \frac{15 + 10{,}5}{2} \cdot 4{,}5$$
$$S = 57{,}375$$

$$S \doteq 57{,}4\,\mathrm{m}^2$$

Obsah průřezu náspu železniční tratě je přibližně $57{,}4\,\mathrm{m}^2$.

Úlohy

8. Který z obrazců $ABCD$ a $EFGH$ (obr. 17) má větší obsah a o kolik?



Obr. 17

9. V pravoúhlém lichoběžníku mají základny délky 9 cm a 5 cm. Délka kratšího ramene je 3 cm. Vypočítejte jeho obsah a obvod.

10. Parcela má tvar kosočtverce. Jeho strana je dlouhá 25,6 m a vzdálenost stran AB a CD je 22 m. Vypočítejte její výměru.

11. Kosočtverec má délky úhlopříček 4,2 cm a 3,4 cm. Vypočítejte
a) délku strany kosočtverce,
b) výšku kosočtverce.

* **12.** Ramena lichoběžníku mají délky 12 cm a 8 cm. Jeho obvod je 41 cm. Určete délku jeho střední příčky.

* **13.** Určete obvod a obsah kosodélníku $ABCD$, jehož kratší strana AD má délku 5 cm a pata výšky vedené vrcholem D ke straně AB dělí stranu AB na dva úseky délek 3 cm a 4 cm.

Příklad 3

Délky stran trojúhelníku jsou v poměru 2 : 5 : 7. Jeho obvod je 42 cm. Určete délky stran.

Řešení
Strany trojúhelníku označíme a, b, c.
Platí:

$$a : b : c = 2 : 5 : 7$$
$$a + b + c = 42\,\mathrm{cm}$$

$a \ldots\ldots 2k, \quad b \ldots\ldots 5k, \quad c \ldots\ldots 7k$

$$a + b + c = 42$$
$$2k + 5k + 7k = 42$$
$$14k = 42$$
$$k = 3$$

$a = 6\,\text{cm}, \quad b = 15\,\text{cm}, \quad c = 21\,\text{cm}$

Délky stran trojúhelníku jsou 6 cm, 15 cm a 21 cm.

Úlohy

14. Strany obdélníku jsou v poměru 3 : 5. Jeho obvod je 48 cm. Vypočítejte délku jeho úhlopříčky.

* **15.** Délky stran obdélníku jsou v poměru 1 : 3. Poloměr kružnice opsané obdélníku je 10 cm. Vypočítejte jeho obvod.

16. Obvod rovnoběžníku je 45 cm. Určete délky jeho stran, jestliže jsou v poměru 7 : 8.

17. Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny jsou v poměru 3 : 5, rameno je dlouhé 6 cm a výška je 4 cm.

* **18.** Sadem tvaru lichoběžníku prochází cesta kolmá na rovnoběžné strany. Je široká 80 cm. Délky základen jsou v poměru 5 : 3 a délka delší základny k délce cesty je v poměru 5 : 6. Kolik metrů čtverečných zabírá cesta, je-li výměra celého sadu $5\,400\,\text{m}^2$?

19. Vypočítejte obsah a obvod čtverce, jehož úhlopříčka má délku 10 cm.

20. Vypočítejte obvod kosočtverce, jehož obsah je $400\,\text{cm}^2$ a délka jedné úhlopříčky je 8 cm.
(Návod: Použijte vzorec pro výpočet obsahu kosočtverce $S = \frac{u_1 \cdot u_2}{2}$.)

21. Vypočítejte obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož obvod je 72 cm.

22. Vypočítejte délku strany rovnostranného trojúhelníku, jehož obsah je $50\,\text{cm}^2$.

23. Vypočítejte délky úhlopříček kosočtverce, je-li obsah kosočtverce $156\,\text{cm}^2$ a délka strany 13 cm.

24. V pravoúhlém lichoběžníku mají základny délky 3,2 cm a 62 mm. Kratší rameno má délku 0,25 dm. Vypočítejte délky úhlopříček a druhého ramene.

* **25.** Vypočítejte nejmenší poloměr kruhové desky, ze které se dá vyříznout rovnostranný trojúhelník se stranou délky 12 cm.

* **26.** Kruhový stůl o průměru 80 cm je pokryt čtvercovým ubrusem s délkou strany 1,2 m. O co výše nad zemí je střed ubrusu než jeho rohy?

* **27.** Pole osázené zeleninou má tvar pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku o délce odvěsny 24 m. Ve vrcholech trojúhelníku jsou umístěny otáčecí postřikovače s dosahem 12 m. Jak velkou část pole tyto postřikovače nezavlažují?

28. Ze čtverce s délkou strany 35 cm je vystřižen kruh s největším možným průměrem. Kolik procent obsahu čtverce tvoří odpad?

29. Kolo těžní věže má průměr 1,5 m. O kolik metrů se spustí klec výtahu, když se kolo otočí 25krát?

30. Rovnoběžník má délky stran v poměru 3 : 4 a jeho obvod je 2,8 m. Určete délky stran.

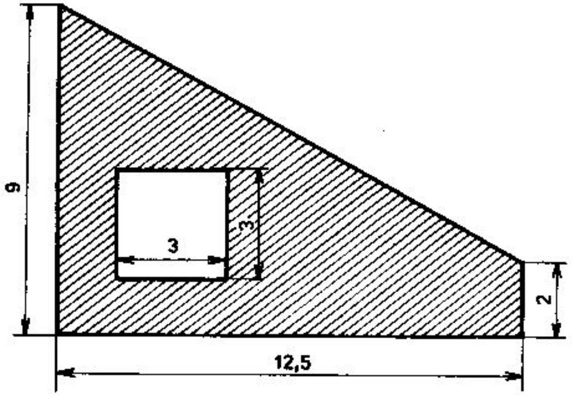
31. V obdélníku je průsečík úhlopříček vzdálen o 4 cm více od kratší strany než od delší. Obvod obdélníku je 56 cm. Určete délky stran obdélníku.

32. Určete vnitřní úhly rovnoběžníku, víte-li, že jeden z nich je o 50° větší než druhý.

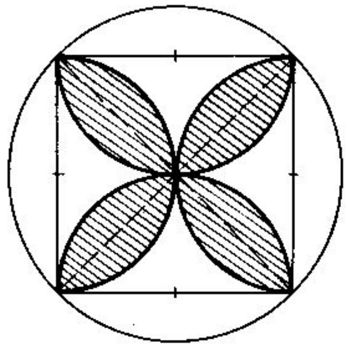
33. Podložka zakreslená na obr. 18 má vyříznutý čtvercový otvor. Vypočítejte obsah podložky, jsou-li údaje na obrázku v centimetrech.

34. Délky základen lichoběžníku jsou v poměru 2 : 3 a délka střední příčky je 5 m. Určete délky základen.

* **35.** Nad stranami čtverce vepsaného do kružnice o poloměru 3 cm jsou opsány polokružnice, které procházejí středem čtverce. Vypočítejte obsah obrazce tvaru čtyřlístku (obr. 19).



Obr. 18



Obr. 19

36. Vypočítejte poloměr kruhové dráhy, kterou musí běžec proběhnout třikrát, aby uběhl 2 km.

37. Vypočítejte obsah pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$, jestliže je vepsán do kružnice s poloměrem

a) $r = 3\,\text{cm}$,

b) $r = 0{,}42\,\text{dm}$.

* **38.** Vypočítejte poloměr kruhu, jehož obsah S (v cm^2) a obvod o (v cm) mají touž číselnou hodnotu.

39. Trojúhelník ABC má obvod $o = 26\,\text{cm}$ a délky stran $a = 6{,}5\,\text{cm}$, $b = 11{,}2\,\text{cm}$. Seřaďte jeho vnitřní úhly podle velikosti.

40. Délky základen rovnoramenného lichoběžníku jsou v poměru 5 : 3, ramena mají délku 5 cm, výška $v = 4{,}8\,\text{cm}$. Vypočítejte obvod a obsah lichoběžníku.

* **41.** Délky stran dvou čtverců jsou v poměru 3 : 5. Vypočítejte jejich obsahy, jestliže větší čtverec má stranu délky 20 cm, a určete jejich poměr.

42. Střední příčka rovnoramenného trojúhelníku má délku 3 cm. Určete délky jeho stran, jestliže jeho obvod je 16 cm.

* **43.** Vypočítejte poloměr kružnice, je-li o 7 cm menší než obvod pravidelného šestiúhelníku, který je do ní vepsán.

* **44.** Určete poloměr kruhu, pro který platí, že číselné hodnoty jeho obvodu a obsahu jsou v poměru 3 : 7.

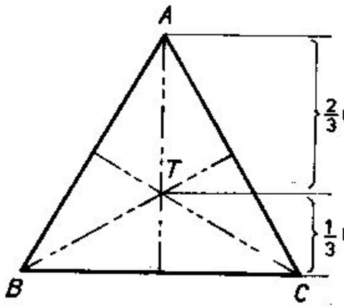
* **45.** Vypočítejte obsah mezikruží, které vytvářejí kružnice opsaná a vepsaná rovnostrannému trojúhelníku se stranou délky $a = 3\,\text{cm}$. (Návod: V rovnostranném trojúhelníku leží střed kružnice vepsané a opsané v jednom bodě, a to v průsečíku těžnic v tzv. těžišti, jehož poloha je vyznačena na obr. 20.)

46. $1\,\text{m}^2$ ocelového plechu o tloušťce 3 mm má hmotnost 24 kg. Vypočítejte hmotnost kruhové desky o poloměru 1,2 m, zhotovené z tohoto plechu.

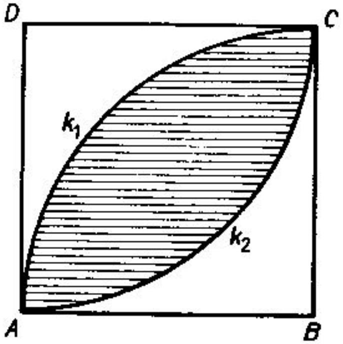
47. Poloměr kola je 50 cm. Kolikrát se otočí za 5 minut, jestliže ujede 12 km za hodinu?

* **48.** Lichoběžník, jehož základny mají délky 100 cm a 80 cm a výška je 50 cm byl rozdělen přímkou rovnoběžnou se základnami na dva lichoběžníky, jejichž výšky jsou v poměru 2 : 3. Vypočítejte délku společné základny těchto lichoběžníků.

49. Kolem bazénu s obdélníkovým dnem s rozměry 25 m a 12 m byl vytvořen pás ze čtvercových betonových dlaždic se stranou délky



Obr. 20



Obr. 21

50 cm. Jedna dlaždice stála 78 Kč. Jaké byly finanční náklady na nákup dlaždic?

* **50.** Je dán čtverec $ABCD$ ($a = 10$ cm). Vrcholy B, D jsou středy oblouků kružnic k_1, k_2 s poloměrem $r = a$. Vypočítejte obsah vyšrafované části čtverce (obr. 21). Vyjádřete ho i obecně.

51. Pila má dostat takovou kulatinu, aby se z ní daly vyřezat hranoly se čtvercovým průřezem o délce strany 12 cm. Jaký nejmenší průměr musí mít kulatina na užším konci?

52. Délka strany pravidelného šestiúhelníku je 3 cm. Vypočítejte obsah jemu vepsané kružnice.

53. Vypočítejte poloměr kružnice vepsané a opsané čtverci se stranou délky $a = 5$ cm.

* **54.** Vypočítejte délku tětivy kružnice, která je vzdálena od středu kružnice 3,5 cm. Poloměr kružnice je 5 cm.

* **55.** Bod A má od středu kružnice s poloměrem $r = 5$ cm vzdálenost 13 cm. Vypočítejte délku tětivy spojující body dotyku T_1 a T_2 tečen vedených z bodu A ke kružnici k.

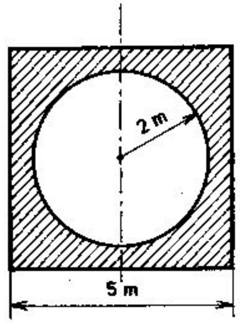
56. Obrázek čtvercového formátu je nalepen na tvrdé podložce s rozměry 8 cm a 12 cm a zaujímá 66,7 % plochy podložky. Vypočítejte rozměry obrázku.

* **57.** Kruhový záhon o průměru 8 m se má rozdělit soustřednou kružnicí na kruh a mezikruží se stejným obsahem. určete poloměr této kružnice.

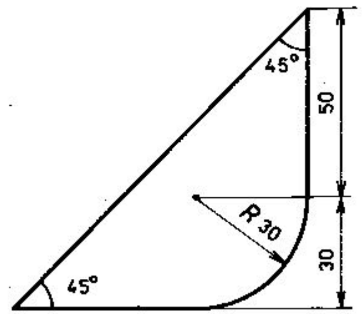
58. Pás plechu 40 cm široký je stočen do tvaru roury a svařen. Jaký je průměr roury, je-li tloušťka plechu zanedbatelná?

59. Kolo lokomotivy má vnější průměr 1,13 m. Kolik otáček vykoná na trati dlouhé 10 km?

60. Poloměr kruhového záhonu je 2 m. Okolo něho je plocha vysypaná pískem, jejíž hranici tvoří strany čtverce o délce 5 m a obvod záhonu. Vypočítejte obsah plochy vysypané pískem (obr. 22).



Obr. 22



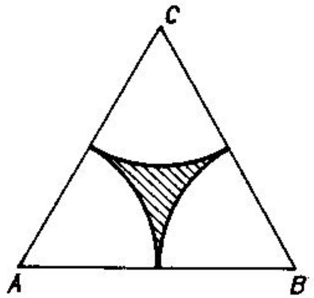
Obr. 23

61. Jaký musí být nejmenší průměr kruhu, aby z něho bylo možné vyříznout pravidelný šestiúhelník, který má vzdálenost protilehlých stran 12 cm?

62. Podložka má tvar uvedený na obr. 23. Oblouk je čtvrtkružnice. Vypočítejte obvod a obsah podložky. (Rozměry na obr. 23 jsou udány v milimetrech.)

63. V tenké čtvercové desce se stranou délky 25 cm byly vyříznuty tři kruhové otvory s průměry $d_1 = 2$ cm, $d_2 = 4$ cm, $d_3 = 20$ cm. Vypočítejte obsah desky po vyříznutí otvorů.

* **64.** Rovnostranný trojúhelník ABC má délku strany 8 cm. Kolem vrcholu A, B, C jsou sestrojeny oblouky kružnic (obr. 24) s poloměrem 4 cm. Vypočítejte obvod a obsah vyšrafované části trojúhelníku.



Obr. 24

65. Kolik stříbra se spotřebuje na postříbření 2 184 kusů jabloneckých výlisků tvaru pravidelných šestiúhelníků s délkou strany 8 mm a 3 323 kusů čtvercových výlisků s délkou strany 6 mm? Který z postříbřených výlisků bude dražší? (K postříbření je třeba 2,5 g stříbra na 1 m^2.)

66. Strana čtverce má délku 6 cm. Vypočítejte, o kolik procent je úhlopříčka tohoto čtverce delší než jeho strana.

67. Doplňte chybějící údaje:

Obrazec	Strana	Příslušná výška	Obsah
kosočtverec	8,2 cm	5 cm	
rovnoběžník	2,5 dm		1,25 dm^2
trojúhelník		$3\frac{1}{4}$ m	6,5 m^2
kosočtverec		2,6 dm	11,96 dm^2
trojúhelník	3,4 cm	2 cm	

68. Doplňte chybějící údaje:

Lichoběžník	Delší základna	Kratší základna	Výška	Rameno	Obvod	Obsah
	6 cm	4,2 cm	3 cm	–	–	
	7 cm	3 cm		–	–	45 cm^2
	5 cm		4 cm	–	–	26 cm^2
rovnoramenný	8 cm		4 cm	5 cm		
pravoúhlý		5 cm	6 cm	10 cm		
rovnoramenný	14 m	4 m	12 m			

69. Fotografie s rozměry 6 cm a 12 cm byla nalepena na papír s rozměry 12 cm a 15 cm. Kolik procent papíru fotografie zabírá?

70. Obdélníková zahrada byla 75 m dlouhá a 30 m široká. Byla zvětšena tak, že každý její rozměr se zvětšil o 20 %. O kolik čtverečných metrů se zvětšila výměra zahrady? O kolik procent se zvětšila výměra?

71. Dva obdélníky mají sobě rovné obsahy 26,6 cm^2. Jeden z nich má délku 7,6 cm, druhý 13,3 cm. O kolik centimetrů se liší jejich obvody?

72. Sál obdélníkového půdorysu měl jeden rozměr o 20 m delší než druhý. Po přestavbě se délka sálu zmenšila o 5 m a zároveň se šířka zvětšila o 10 m. Obsah podlahy se tak zvětšil o 300 m^2. Jaké byly původní rozměry sálu?

73. Délka jedné odvěsny pravoúhlého trojúhelníku se rovná 75 % délky druhé odvěsny. Určete obvod tohoto trojúhelníku, je-li jeho obsah 24 cm^2.

* **74.** Pravoúhlý trojúhelník ABC má odvěsny délek $a = 8$ cm, $b = 12$ cm. Vypočítejte vzdálenost bodu C od středu přepony.

* **75.** Trojúhelník ABC je rovnostranný. Jeho strana má délku 8 cm. Body D, E, F jsou postupně středy stran AB, BC, AC. Vypočítejte obsah trojúhelníku DEF. V jakém poměru je obsah trojúhelníku ABC k obsahu trojúhelníku DEF?

* **76.** Je dán trojúhelník ABC a body D, E, které jsou po řadě středy stran AB, BC. Úsečka DE rozdělí trojúhelník ABC na trojúhelník a lichoběžník. Určete poměr jejich obsahů.

77. Je možné stříhat z pásu plechu širokého 2,2 cm destičky tvaru kosočtverce se stranou délky 2,4 cm a úhlopříčkou 3 cm?

78. Parcela má tvar pravoúhlého lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$ s pravým úhlem u vrcholu B. Strana AB má délku 36 m. Délky stran AB a BC jsou v poměru 12 : 7. Délky stran AB a CD jsou v poměru 3 : 2. Vypočítejte spotřebu pletiva na oplocení parcely.

79. Zahrada má dva protější ploty rovnoběžné. Jejich vzdálenost je 38 m. Délky plotů jsou 52,6 metru a 84 metrů. Vypočítejte výměru zahrady.

80. Obvod kruhu je 18,84 cm. Vypočítejte jeho obsah.

81. Obsahy dvou kruhů jsou v poměru 4 : 9. Větší kruh má průměr 12 cm. Vypočítejte poloměr menšího kruhu.

* **82.** Hnací kotouč pásové pily s průměrem 36 cm vykoná za minutu 940 otáček. Jakou řeznou rychlostí se pila pohybuje?

* **83.** Stavební pozemek tvaru obdélníku s rozměry 40 m a 60 m se má z části zastavět domem se základnou tvaru čtverce, jehož strana má délku 18 m. Zbytek pozemku se má rozdělit tak, aby jedna třetina připadla na dvůr a zbytek na zahrádku. Vypočítejte výměru zahrádky.

* **84.** Čtverci $ABCD$ se stranou délky 10 cm je opsána a vepsána kružnice. Tyto kružnice jsou hraniční kružnice mezikruží. Vypočítejte obsah tohoto mezikruží.

* **85.** Pravidelný šestiúhelník a rovnostranný trojúhelník jsou vepsány do kruhu s poloměrem 6 cm. Jaký je poměr obsahů trojúhelníku a šestiúhelníku?

86. Výška trojúhelníku RST příslušná ke straně RS má délku 5 cm a dělí stranu RS na dvě části délek 1 cm a 12 cm. Vypočítejte obvod trojúhelníku RST.

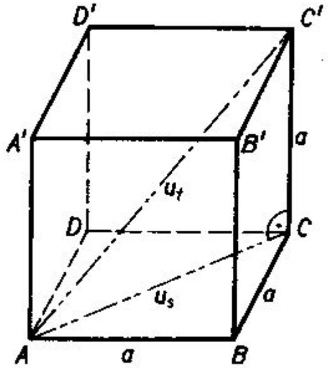
87. Rovnoramenný trojúhelník ABC má délku základny $|AB| = 3$ cm. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li $r = |AB|$ poloměr kružnice jemu opsané.

11 POVRCHY A OBJEMY TĚLES

Příklad 1

Vypočítejte povrch, objem a délku tělesové úhlopříčky krychle o hraně délky 4 dm. Načrtněte síť této krychle.

Řešení (obr. 25)
$a = 4\,\mathrm{dm}$
$S = \dots\ \mathrm{dm}^2$
$V = \dots\ \mathrm{dm}^3$
$u_t = \dots\ \mathrm{dm}$



Obr. 25

$S = 6a^2 \qquad V = a^3 \qquad u_t = \sqrt{a^2 + u_s^2}$

$S = 6 \cdot 4^2 \qquad V = 4^3$

$S = 96 \qquad V = 64$

$S = 96\,\mathrm{dm}^2 \qquad V = 64\,\mathrm{dm}^3$

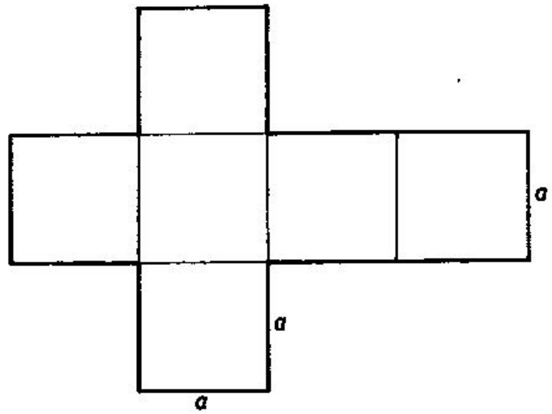
Délku tělesové úhlopříčky u_t určíme z pravoúhlého trojúhelníku ACC' o odvěsnách $AC = u_s$, $CC' = a$. Délku stěnové úhlopříčky u_s vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníku ABC, ve kterém stěnová úhlopříčka u_s je přeponou trojúhelníku ABC.

$u_s = \sqrt{a^2 + a^2} = a \cdot \sqrt{2} \qquad u_t = \sqrt{a^2 + u_s^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = a \cdot \sqrt{3}$

$u_s = 4 \cdot \sqrt{2} \doteq 4 \cdot 1{,}41 \qquad u_t = 4 \cdot \sqrt{3} \doteq 4 \cdot 1{,}73$

$u_s = 5{,}64 \qquad u_t = 6{,}92$

$u_s = 5{,}64\,\mathrm{dm} \qquad u_t = 6{,}92\,\mathrm{dm}$



Obr. 26

Povrch krychle je $96\,\mathrm{dm}^2$, objem krychle je $64\,\mathrm{dm}^3$, délka tělesové úhlopříčky krychle je 6,92 dm. Síť je na obr. 26.

Úlohy

1. Vypočítejte délku tělesové úhlopříčky krychle o hraně délky 8 cm. Počítejte s přesností na milimetry.
2. Vypočítejte povrch, objem a délku tělesové úhlopříčky kvádru o hranách délek 4 cm, 6 cm a 8 cm. Načrtněte síť tohoto kvádru.
3. Hrana krychle má délku a. Určete délku hrany krychle, která má dvojnásobný povrch.
4. Jak se změní objem krychle, zdvojnásobíme-li délku její hrany?
5. Krychle $ABCDA'B'C'D'$ má hranu délky 12 cm. Vypočítejte obsah úhlopříčného řezu $BDD'B'$.
6. Krychle $ABCDA'B'C'D'$ má obsah řezu $ACC'A'$ roven $64\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítejte povrch krychle.
7. Kvádr s podstavou o rozměrech 17 cm a 13 cm má povrch $1\,342\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítejte výšku kvádru a načrtněte jeho síť.
8. Vypočítejte povrch a objem krychle, jejíž tělesová úhlopříčka má délku 15 cm.

9. Jaká je hmotnost žulového kvádru o rozměrech 60 cm, 45 cm a 72 cm, je-li hmotnost 1 m^3 žuly 2 900 kg?

10. Místnost je 39,5 m dlouhá, 19,2 m široká a 5 m vysoká. Nejvýše kolik osob může být v této místnosti, počítá-li se na osobu alespoň 4 m^3 vzduchu?

11. Uzavřená benzínová nádrž má tvar kvádru o rozměrech 80 cm, 30 cm, 20 cm. Hladina benzínu sahá 6 cm pod horní okraj nádrže. Určete množství benzínu v nádrži v litrech pro všechny možné stabilní polohy nádrže.

12. Kvádr o hranách délek 10 cm a 8 cm má stejný objem jako krychle o hraně délky 1 dm. Vypočítejte třetí rozměr kvádru. Porovnejte poměrem povrchy obou těles.

13. Bazén tvaru kvádru o rozměrech dna 15 m a 20 m a hloubce 2 m se napouští dvěma rourami. První rourou přitéká 6 l vody za sekundu, druhou 2,4 hl vody za minutu. Za kolik hodin a minut bude bazén naplněn 40 cm pod okraj?

14. Do nádrže tvaru kvádru o rozměrech dna 12 m a 6 m a hloubce 2 m bylo napuštěno 288 hl vody. Kolik procent objemu nádrže voda zaujímala?

15. Skleněná nádrž má tvar kvádru o vnitřních rozměrech dna 24 cm a 12 cm. Výška vody v nádrži je 20 cm. Vypočítejte objem tělesa, které se do vody potopilo, jestliže voda stoupla o 3 cm.

16. Vodní nádrž tvaru kvádru má rozměry dna 7,5 m a 3 m. Jak vysoko bude sahat voda v nádrži, jestliže do prázdné nádrže bude přitékat 10 l vody za sekundu a přítok bude otevřen $\frac{4}{5}$ hodiny?

17. V akváriu tvaru kvádru o vnitřních rozměrech dna 25 cm a 30 cm je 9 litrů vody. Vypočítejte obsah ploch, které jsou vodou smáčeny.

18. Hranol $ABCDA'B'C'D'$ má čtvercovou podstavu. Stěnová úhlopříčka AC podstavy má délku 9,9 cm, tělesová úhlopříčka AC' má délku 11,4 cm. Vypočítejte povrch a objem hranolu. Načrtněte síť hranolu.

19. Podstava kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník, jehož základna má délku 10 cm a rameno má délku 13 cm. Výška hranolu je trojnásobek výšky podstavného trojúhelníku k jeho základně. Vypočítejte povrch tohoto hranolu a načrtněte jeho síť.

20. Vypočítejte objem hranolu s kosočtvercovou podstavou, jehož jedna úhlopříčka podstavy má délku 20 cm a hrana podstavy má délku 26 cm. Délka hrany podstavy je k výšce hranolu v poměru 2 : 3.

21. Podstava kolmého trojbokého hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou délky 5 cm. Obsah největší stěny pláště je 130 cm^2 a výška tělesa je 10 cm. Vypočítejte jeho objem.

22. Podstava hranolu je kosočtverec o délce strany 6 cm a výšce 4 cm. Výška hranolu je o 125 % větší než délka strany kosočtverce. Vypočítejte povrch a objem hranolu a načrtněte jeho síť.

23. Chceme zhotovit kartónovou krabici tvaru čtyřbokého hranolu s kosočtvercovou podstavou. Kosočtverec má mít stranu délky 5 cm a jednu úhlopříčku o délce 8 cm. Výška krabice má být 12 cm. Krabice bude nahoře otevřená. Kolik metrů čtverečných kartónu budeme potřebovat, jestliže počítáme na překrytí a spoje 5 % kartónu?

24. Silniční násep má příčný řez tvaru rovnoramenného lichoběžníku o základnách délek 10 m a 16 m a s rameny délky 5 m. Kolik metrů krychlových zeminy je v náspu o délce 400 m?

25. Podstava kolmého hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou délky $a = 5$ cm a přeponou délky $c = 13$ cm. Výška hranolu se rovná obvodu podstavy. Vypočítejte povrch a objem hranolu.

26. Kartónový obal bez víka má tvar pravidelného šestibokého hranolu s podstavnou hranou délky 12 cm a výšce 15 cm. Kolik kartónu se spotřebuje na výrobu pěti obalů, připočítává-li se na záhyby 10 % kartónu? Výsledek udejte ve čtverečných decimetrech a zaokrouhlete na jednotky.

Příklad 2

Nádoba tvaru válce obsahuje 62,8 litru vody a je zcela naplněna. Výška nádoby je 0,5 m. Vypočítejte průměr dna.

Řešení

$V = 62{,}8\,l = 62{,}8\,dm^3$
$v = 0{,}5\,m = 5\,dm$
$d = \dots\,dm$
$V = \pi r^2 v$
$d = 2r$

$62{,}8 = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 5$
$r^2 = 4$
$r = 2$

$d = 2r = 2 \cdot 2\,dm = 4\,dm$
Průměr dna válce je 4 dm.

Úlohy

27. Obvod dna válce je 31,4 cm, výška válce je 1 dm. Vypočítejte jeho povrch a objem a načrtněte jeho síť.

28. Osovým řezem válce je čtverec o obsahu $56{,}25\,cm^2$. Vypočítejte jeho povrch a objem. Výsledek vyjádřete ve čtverečných decimetrech a v krychlových decimetrech a zaokrouhlete na setiny. Načrtněte síť válce.

29. Nádrž tvaru válce pojme 60 hl vody a je hluboká 2,5 m. Vypočítejte průměr nádrže.

30. Nádrž tvaru rotačního válce je položena. Průměr podstavy válce je 0,4 m, délka válce je 0,8 m. Kolik litrů kapaliny je v nádrži, je-li naplněna do poloviny?

31. Nádoba tvaru válce má průměr podstavy 0,8 m a obsah podstavy je roven obsahu pláště. Nejvýše kolik litrů vody můžeme nalít do nádoby?

32. Rozhodněte, který výsledek je správný:

Povrch válce o průměru podstavy $\frac{1}{2}$ m a výšce 1 m je:

a) $\pi\,m^2$ b) $\frac{\pi}{2}\,m^2$ c) $2\pi\,m^2$ d) $\frac{5}{8}\pi\,m^2$

33. Roura má délku 1,5 m. Její vnější průměr je 60 cm, vnitřní průměr je 52 cm. Vypočítejte hmotnost roury, je-li hustota materiálu, z něhož je zhotovena, $2\,\frac{g}{cm^3}$. Výsledek zaokrouhlete na kilogramy.

34. Obsah pláště rotačního válce je $120\pi\,cm^2$ a povrch $192\pi\,cm^2$. Vypočítejte průměr podstavy válce a výšku válce.

35. V nádrži tvaru válce s vnitřním průměrem 6 m je 942 hl vody. Voda sahá do $\frac{2}{3}$ hloubky nádrže. Vypočítejte hloubku nádrže.

36. Kolik metrů ocelového drátu o průměru 0,4 cm a hustotě $\varrho = 7\,800\,\frac{kg}{m^3}$ je v kotouči o hmotnosti 1,17 kg? Výsledek udejte v metrech a zaokrouhlete na jednotky.

37. Kolik krychlových centimetrů dřeva se změní na piliny, jestliže přeřízneme kmen stromu o průměru 42 cm a je-li šířka řezné spáry 3 mm?

38. Kolem nádrže tvaru válce o vnějším průměru 3 m má být vybetonován pás o šířce 0,5 m. Tloušťka pásu má být 10 cm. Na $1\,m^3$ betonu se spotřebuje 200 kg cementu. Vypočítejte, kolik cementu bude nutno použít na vybetonování pásu.

39. Kolik litrů vody může maximálně za jednu sekundu odvádět koryto, jehož průřezem je půlkruh o poloměru 0,5 m, je-li rychlost toku vody $80\,\frac{cm}{s}$?

* **40.** Na pravítko, které má tvar hranolu s podstavou tvaru rovnostranného trojúhelníku o straně délky 3 cm, se má vyrobit pouzdro tvaru válce. Jaký musí být nejmenší vnitřní průměr pouzdra? Rozměr určete s přesností na desetiny centimetru.

* **41.** Do kvádru o výšce 50 cm se čtvercovou podstavou o hraně délky 20 cm je vyvrtán otvor tvaru válce o průměru 12 cm. Osa tohoto otvoru prochází středy podstav kvádru. Vypočítejte objem a povrch takto vzniklého tělesa.

* **42.** Vypočítejte, kolik procent tvoří odpad, jestliže z krychle o hraně délky 8 cm je vysoustruhován válec s maximálním objemem.

☐ **Příklad 3**

Věžička má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 0,8 m. Výška věžičky je 1,2 m. Kolik metrů čtverečných plechu je třeba na její pokrytí, počítáme-li na spoje, překrytí a odpad 10 % plechu navíc? Výsledek vyjádřete v m^2 a zaokrouhlete na setiny.

Řešení (obr. 27)

$a = 0{,}8\,\mathrm{m}$

$v = 1{,}2\,\mathrm{m}$

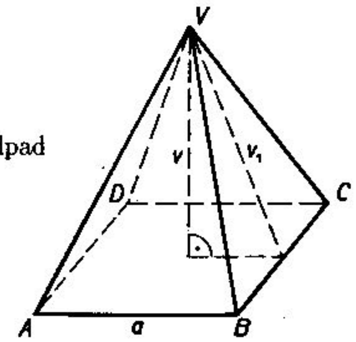
$S = \ldots\,\mathrm{m}^2$

$S = S_{pl} + S_2$

S_2 …… plocha na spoje, překrytí a odpad

$S_{pl} = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot v_1$

v_1 …… stěnová výška



Obr. 27

$$v_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2$$

$v_1^2 = 0{,}4^2 + 1{,}2^2$

$v_1^2 = 0{,}16 + 1{,}44 = 1{,}6$

$v_1 \doteq 1{,}265$

$S_{pl} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}265 = 2{,}024$

$S_{pl} = 2{,}024\,\mathrm{m}^2$

z .... $2{,}024\,\mathrm{m}^2$

1 % ze z .... $0{,}020\,24\,\mathrm{m}^2$

10 % ze z .... $0{,}020\,24\,\mathrm{m}^2 \cdot 10 = 0{,}202\,4\,\mathrm{m}^2$

$S_2 = 0{,}202\,4\,\mathrm{m}^2$

$S = 2{,}024\,\mathrm{m}^2 + 0{,}202\,4\,\mathrm{m}^2 = 2{,}226\,4\,\mathrm{m}^2 \doteq 2{,}23\,\mathrm{m}^2$

Na pokrytí věžičky je zapotřebí přibližně 2,23 m^2 plechu.

Úlohy

☐ **43.** Jehlan s obdélníkovou podstavou o rozměrech 6 dm a 8 dm má boční hranu délky 13 dm. Vypočítejte povrch a objem tohoto jehlanu a načrtněte jeho síť.

☐ **44.** Vrchol věže má tvar pravidelného šestibokého jehlanu. Podstavná hrana má délku 1,2 m, výška jehlanu je 1,6 m. Kolik metrů čtverečných plechu je třeba na pokrytí vrcholu věže, je-li na spoje, překrytí a odpad zapotřebí 15 % plechu navíc?

☐ **45.** Střecha věže má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 4 m a výškou 8 m. Kolik procent připadlo na záhyby, překrytí a odpad, jestliže se na pokrytí střechy spotřebovalo 75,9 m^2 plechu?

☐ **46.** Odlitek tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 60 cm a výšce 5 cm je zhotoven z materiálu o hustotě $7{,}8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Vypočítejte jeho hmotnost.

☐ **47.** Vypočítejte povrch a objem rotačního kužele, jehož obvod podstavy je 125,6 cm a strana má délku 25 cm.

☐ **48.** Povrch kužele je 235,5 cm^2. Osovým řezem kužele je rovnostranný trojúhelník. Vypočítejte objem kužele.

☐ **Příklad 4**

Na horní podstavě rotačního válce s průměrem podstavy 10 cm a výšce 30 cm je postaven kužel se stejným poloměrem podstavy jako má válec. Vypočítejte výšku tohoto kužele, jestliže se jeho objem rovná 40 % objemu válce.

Řešení (obr. 28)

$d = 10\,\mathrm{cm}$

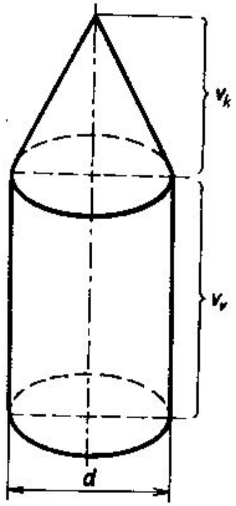
$v_v = 30\,\mathrm{cm}$

$v_k = \ldots\,\mathrm{cm}$

K výpočtu budeme potřebovat následující vztahy:

$V_v = \pi r^2 v_v \qquad (1)$

$$V_k = 0{,}4V_v \qquad (2)$$
$$V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 v_k \qquad (3)$$



Obr. 28

Ze vztahu (1) vypočítáme objem válce:

$$V_v = \pi \cdot 5^2 \cdot 30$$
$$V_v = 750\pi$$

Objem kužele je roven 40 % objemu válce (vztah 2):

$$V_k = 0{,}4 \cdot 750\pi$$
$$V_k = 300\pi$$

Nalezenou hodnotu objemu kužele dosadíme do vzorce pro objem kužele (vztah 3) a vypočítáme výšku kužele:

$$300\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot v_k \quad / : \pi$$
$$300 = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot v_k$$
$$v_k = \frac{3 \cdot 300}{25}$$
$$v_k = 36$$

$v_k = 36\,\text{cm}$
Výška kužele je 36 cm.

Poznámka
Povšimněte si, že číselnou hodnotu π jsme nemuseli vůbec uvádět.

Úlohy

☐ **49.** Nádoba tvaru kužele s průměrem dna 60 cm a stranou délky 50 cm je zcela naplněna vodou. Vodu přelijeme do nádoby, která má tvar válce o poloměru dna 30 cm a výšce 20 cm. Kolik litrů vody je třeba do nádoby tvaru válce dolít, aby byla zcela naplněna?

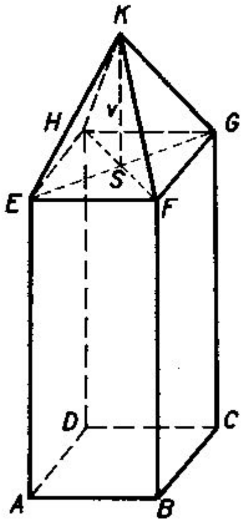
☐ **50.** Plechová stříška tvaru kužele má průměr podstavy 80 cm a výšku 60 cm. Vypočítejte spotřebu barvy na natření této stříšky, spotřebuje-li se 1 kg barvy na 6 m² plechu.

☐ **51.** Nádobka tvaru kužele o poloměru podstavy 20 cm a výšce 36 cm byla zcela naplněna vodou. Voda byla přelita do nádoby tvaru válce o poloměru podstavy 12 cm. Jak vysoko byla voda v nádobě tvaru válce?

☐ **52.** Čtverec o straně délky 3 cm se otáčí kolem své úhlopříčky. Vypočítejte objem a povrch vzniklého tělesa.

☐ **53.** Krychle $ABCDEFGH$ má hranu délky 3 cm. Vypočítejte objem jehlanu $ABCDH$.

☐ **54.** Těleso je složeno z pravidelného čtyřbokého hranolu a pravidelného čtyřbokého jehlanu (obr. 29). Je dáno: $|AB| = |BC| = 5\,\text{cm}$, $|AE| = 24\,\text{cm}$, objem jehlanu je 12,5 % z objemu hranolu. Vypočítejte výšku jehlanu.



Obr. 29

Úlohy

1. Sestrojte osu úsečky KL ($|KL| = 6$ cm).

2. Sestrojte osu úhlu AVB ($|\sphericalangle AVB| = 30°$).

3. Sestrojte kružnici opsanou a vepsanou trojúhelníku ABC, kde $a =$ $= 3{,}5$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm.

4. Určete množinu všech bodů roviny, které mají od dané přímky m vzdálenost 17 mm.

5. Určete množinu všech bodů roviny, které mají od daného bodu S vzdálenost 5 cm.

6. Určete množinu všech bodů roviny, které mají od dané kružnice $k(S; 5\,\text{cm})$ vzdálenost 2 cm.

* **7.** Je dána přímka p a bod A ležící mimo ni. Určete množinu všech bodů roviny, které mají od přímky p vzdálenost 3 cm a od bodu A vzdálenost 5 cm. Uvažte různé vzdálenosti v bodu A od přímky p.

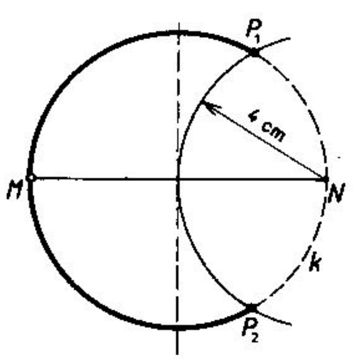
Příklad 1

Je dána úsečka MN délky 8 cm. Určete množinu všech vrcholů P pravoúhlých trojúhelníků MNP s přeponou MN, které mají
a) stranu NP délky **aspoň** 4 cm;
b) úhel MNP **nejvýš** velikosti 45°.

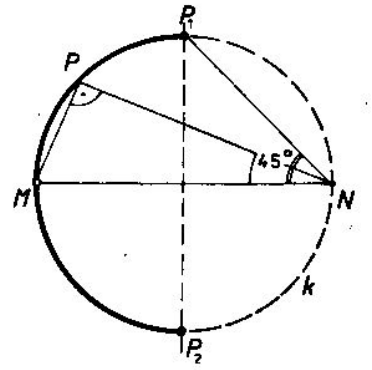
Řešení

a) Množinou vrcholů pravoúhlých trojúhelníků MNP je Thaletova kružnice k s průměrem MN (obr. 30). Množinou krajních bodů P stran NP délky aspoň 4 cm je vnější oblast kružnice $(N, r = 4\,\text{cm})$ včetně této kružnice. Tlustě vytažený oblouk P_1P_2 kružnice k je průnikem obou množin a řešením úlohy. Bod M do množiny nepatří.

b) Množinou vrcholů pravých úhlů je opět kružnice k (obr. 31). Ramena NP všech úhlů MNP velikosti nejvýš 45° protínají kružnici k v bodech oblouku MP_1, kružnice k; obdobně je tomu v opačné



Obr. 30



Obr. 31

polorovině. Hledané body P patří tedy tlustě vytaženému oblouku P_1P_2 kružnice k (s výjimkou bodu M).

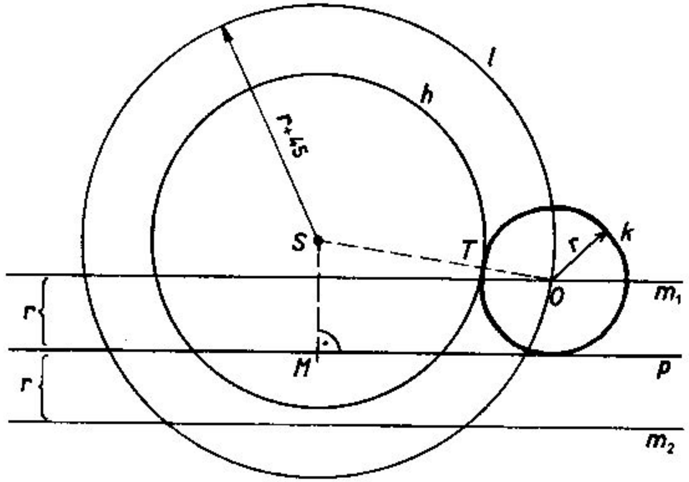
Úlohy

8. Sestrojte kružnice $m(M; r = 5\,\text{cm})$ a $n(N; r = 6\,\text{cm})$ tak, aby spojnice MN jejich středů (tzv. středná) měla délku 4 cm. Vyznačte a popište množiny všech bodů X, pro něž platí
a) $|MX| < 5$ cm a zároveň $|NX| > 6$ cm;
b) $|MX| \leqq 5$ cm a zároveň $|NX| \leqq 6$ cm;
c) $|MX| > 5$ cm a zároveň $|NX| > 6$ cm.

* **9.** Obdélník $OPQR$ o stranách délek 5 cm a 4 cm má úhlopříčku PR. Vyšetřete množinu středů S všech obdélníků $OXYZ$ s úhlopříčkou $XZ \cong PR$. Vrcholy X těchto obdélníků leží na polopřímce OP a vrcholy Z na polopřímce OR.

Příklad 2

Je dána kružnice $h(S; r = 45\,\text{mm})$ a přímka p ve vzdálenosti 3 cm od bodu S. Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r = 20$ mm, které se dotýkají přímky p a s kružnicí k mají vnější dotyk. Proveďte rozbor, zapište postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.



Obr. 32

Řešení

Rozbor (obr. 32)

Na obr. 32 je znázorněno předpokládané řešení — kružnice k. Tato kružnice má požadované vlastnosti: dotýká se přímky p a kružnice h vně a má poloměr 20 mm. Podmínky pro středy O hledaných kružnic jsou tyto:

1. Množinou středů kružnic, které mají poloměr $r = 20\,\mathrm{mm}$ a které se dotýkají přímky p, jsou všechny body přímek m_1 a m_2 rovnoběžných s přímkou p ve vzdálenosti 20 mm.
2. Množinou středů kružnic, které mají poloměr $r = 20\,\mathrm{mm}$ a které se dotýkají kružnice h vně, je kružnice l se středem S a poloměrem 45 mm + 20 mm.

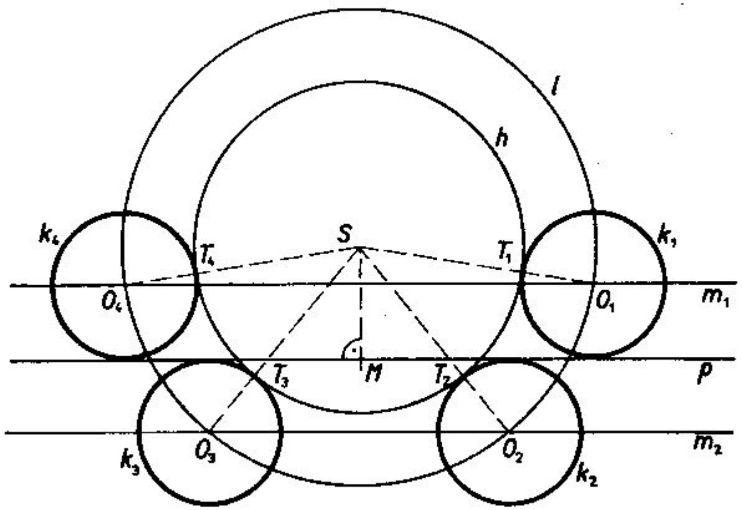
Konstrukce

Postup konstrukce:

1. h; $h(S; 45\,\mathrm{mm})$
2. p; vzdálenost p od S je 3 cm
3. m_1; $m_1 \parallel p$ ve vzdálenosti 20 mm

4. m_2; $m_2 \parallel p$ ve vzdálenosti 20 mm (m_1 a m_2 leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p)
5. l; $l(S; 65\,\mathrm{mm})$
6. O; $O \in m_1 \cap l$ nebo $O \in m_2 \cap l$
7. k; $k(O; 20\,\mathrm{mm})$

Provedení konstrukce (obr. 33):



Obr. 33

Zkouška

Úloha má 4 řešení, tj. kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 (obr. 33), protože každá z přímek m_1, m_2 protne kružnici l ve dvou bodech (platí totiž, že vzdálenost bodu S od každé z přímek m_1, m_2 je menší než 6,5 cm). Každá z kružnic k_1 až k_4 splňuje obě z podmínek úlohy.

Úlohy

10. Je dána přímka p a polopřímka AB, která má počátek A na přímce p a svírá s ní úhel velikosti 75°. Sestrojte všechny kružnice s poloměrem $r = 2\,\mathrm{cm}$, které se dotýkají přímky p i polopřímky AB.

11. Jeden z úhlů, jehož ramena leží na různoběžkách m, n, má velikost $63°$. Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, které se přímek m, n dotýkají.

12. Je dána kružnice $h(O; r' = 5{,}5\,\mathrm{cm})$ a její sečna s, jejíž vzdálenost od středu O je $1{,}5\,\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r = 2\,\mathrm{cm}$, které se dotýkají sečny s a mají s kružnicí h vnitřní dotyk.

* **13.** Různoběžky p, q se protínají v bodě M a svírají úhel velikosti $60°$. Na jedné z polopřímek, na něž dělí bod M přímku q, sestrojte bod Q tak, aby platilo $|MQ| = 3\,\mathrm{cm}$.

a) Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají obou přímek a přitom přímky q v bodě Q.

b) Poloměry nalezených kružnic též vypočítejte a výsledek porovnejte s výsledkem získaným konstrukcí.

* **14.** Sestrojte obdélník $ABCD$ se stranami délek $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 9\,\mathrm{cm}$. Bod P je středem strany BC. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek AB, AP a strany BC obdélníku.

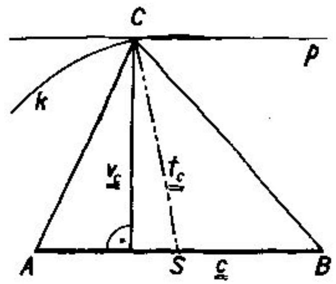
Příklad 3

Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno $c = 4{,}8\,\mathrm{cm}$, $v_c = 4\,\mathrm{cm}$, $t_c = 5{,}2\,\mathrm{cm}$.

Řešení

Rozbor

Na obr. 34 je načrtnut trojúhelník, o kterém předpokládáme, že je řešením úlohy. Jsou v něm vyznačeny všechny prvky, které jsou dány. Konstrukci začneme tak, že sestrojíme stranu AB. Máme určit polohu bodu C. Pokud bod C existuje, musí ležet na rovnoběžce p s přímkou AB ve vzdálenosti v_c. Takové rovnoběžky existují dvě, z nichž každá leží v jedné z opačných polorovin s hraniční přímkou AB. Ke konstrukci zvolíme jednu z těchto polorovin. Bod C musí dále ležet na kružnici k se středem S (obr. 34) a poloměrem t_c. Bude tedy průsečíkem kružnice k a přímky p, pokud takový průsečík existuje.



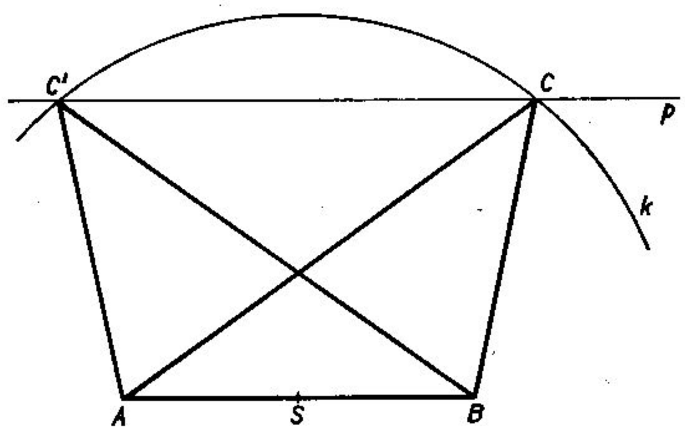
Obr. 34

Konstrukce

Postup konstrukce:

1. AB; $|AB| = c = 4{,}8\,\mathrm{cm}$
2. p; $p \parallel\!\leftrightarrow AB$, ve vzdálenosti $v_c = 4\,\mathrm{cm}$
3. k; $k(S; r = t_c = 5{,}2\,\mathrm{cm})$, S — střed úsečky AB
4. C; $C \in p \cap k$
5. $\triangle ABC$

Provedení konstrukce (obr. 35):



Obr. 35

Zkouška

Trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy: strana c má délku 4,8 cm, výška v_c je 4 cm a těžnice t_c má délku 5,2 cm (ověříme např. měřením). Totéž platí pro trojúhelník ABC'.

Úloha má ve zvolené polorovině dvě řešení.

Úlohy

15. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno:
a) $a = 3\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 30°$
b) $c = 7{,}2\,\text{cm}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 15°$
c) $c = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$, $\gamma = 70°$

16. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) $a = 4{,}2\,\text{cm}$, $v_a = 5\,\text{cm}$, $\beta = 30°$
b) $c = 3{,}8\,\text{cm}$, $b = 5{,}1\,\text{cm}$, $t_c = 5{,}1\,\text{cm}$
*c) $b = 3\,\text{cm}$, $t_c = 2{,}5\,\text{cm}$, $t_a = 4\,\text{cm}$
(Návod: Využijte vlastnosti těžiště. Těžiště leží na každé z těžnic ve vzdálenosti $\frac{1}{3}$ těžnice od příslušné strany.)

* Příklad 4

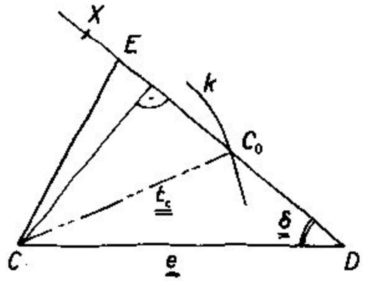
Sestrojte trojúhelník CDE, je-li dána strana CD délky $e = 8\,\text{cm}$, těžnice t_c délky 8,5 cm a úhel s vrcholem D velikosti $\delta = 75°$. V trojúhelníku CDE sestrojte výšku v_c.

Řešení

Rozbor

Předpokládejme, že trojúhelník CDE na obr. 36 je řešením úlohy. Známe body C, D. Bod C_0 je středem strany DE a je možné ho sestrojit jako průsečík kružnice $k(C; r = t_c)$ a ramene DX úhlu CDX velikosti 75°. Hledáme ještě vrchol E. Pro tento neznámý vrchol platí:
1. E leží na polopřímce DC_0
2. $|DE| = 2 \cdot |DC_0|$

Výšku v_c sestrojíme jako kolmici k přímce DC_0 bodem C.

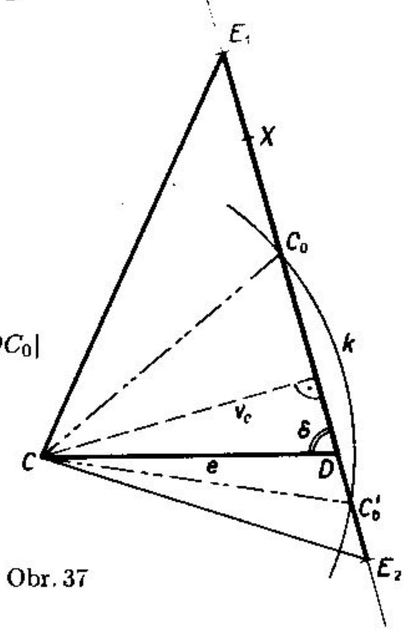


Obr. 36

Konstrukce

Postup konstrukce:
1. CD; $|CD| = e = 8\,\text{cm}$
2. $\sphericalangle CDX$; $|\sphericalangle CDX| = \delta = 75°$
3. k; $k(C; t_c = 8{,}5\,\text{cm})$
4. C_0; $C_0 \in \mapsto DX \cap k$
5. E; $E \in \mapsto DC_0$, $|DE| = 2 \cdot |DC_0|$
6. $\triangle CDE$
7. v_c; $v_c \perp \mapsto DE$ bodem C

Provedení konstrukce (obr. 37):



Obr. 37

Zkouška

Protože $t_c > e$, protne kružnice k přímku DX ve dvou bodech C_0 a C_0', z nichž C_0 je na polopřímce DX a C_0', na polopřímce k ní opačné. Trojúhelník CDE_1 **je řešením** úlohy, protože má všechny požadované vlastnosti: stranu CD délky 8 cm, těžnici t_c délky 8,5 cm a **vnitřní** úhel δ velikosti 75°. Trojúhelník CDE_2 **není řešením** úlohy; má sice stranu CD délky 8 cm a těžnici t_c délky 8,5 cm, avšak jeho **vnitřní** úhel CDE_2 má velikost $180° - \delta = 105°$. Úloha má tedy **jediné** řešení.

Úlohy

17. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána strana BC délky $a = 10\,\mathrm{cm}$, výška $v_a = 5{,}5\,\mathrm{cm}$ a úhel velikosti $\gamma = 60°$.

18. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník PQR, je-li dána délka odvěsny $p = 6\,\mathrm{cm}$ a výška k přeponě

a) $v_q = 2{,}5\,\mathrm{cm}$;
b) $v_q = 3{,}5\,\mathrm{cm}$;
c) $v_q = 6{,}5\,\mathrm{cm}$.

19. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $|AB| = c = 9\,\mathrm{cm}$, $v_a = 7{,}5\,\mathrm{cm}$, $t_c = 6{,}5\,\mathrm{cm}$.

20. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky stran $c = 8\,\mathrm{cm}$, $a = 5\,\mathrm{cm}$ a výška $v_c = 3{,}5\,\mathrm{cm}$.

21. Sestrojte trojúhelník ABC, má-li výšku $v_c = 6\,\mathrm{cm}$, těžnici délky $t_c = 6{,}5\,\mathrm{cm}$ a úhel velikosti $\alpha = 45°$.

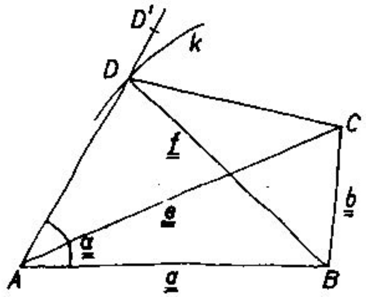
22. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka strany $c = 7\,\mathrm{cm}$, výška $v_b = 6{,}5\,\mathrm{cm}$ a výška $v_c = 5\,\mathrm{cm}$.

Příklad 5

Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož všechny strany jsou navzájem různoběžné (různoběžník), je-li dáno $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 3\,\mathrm{cm}$, $e = 5\,\mathrm{cm}$, $f = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$.

Řešení

Rozbor



Obr. 38

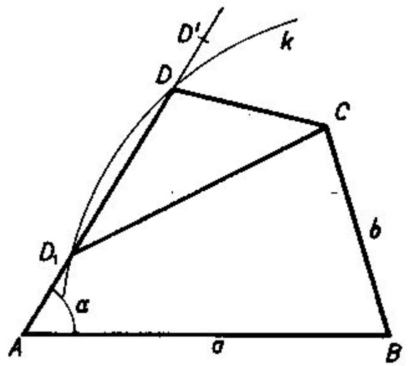
Na obr. 38 je čtyřúhelník, o němž předpokládáme, že je řešením úlohy. Konstrukci začneme sestrojením úsečky AB. Hledáme body C, D. Bod C je vrcholem trojúhelníku ABC, jehož strany tvoří strany a, b a úhlopříčka e čtyřúhelníku $ABCD$. Bod D leží na kružnici $k(B; r = f)$ a na rameni úhlu α s vrcholem v bodě A a druhým ramenem na polopřímce AB.

Konstrukce

Postup konstrukce:

1. AB; $|AB| = 5\,\mathrm{cm}$
2. $\triangle ABC$ podle konstrukce *sss*
3. α; $|\sphericalangle BAD'| = 60°$
4. k; $k(B; r = f = 4{,}5\,\mathrm{cm})$
5. D; $D \in k \cap AD'$
6. čtyřúhelník $ABCD$

Provedení konstrukce (obr. 39):



Obr. 39

Zkouška

Pro sestrojený čtyřúhelník $ABCD$ platí $a = 5\,\mathrm{cm}$, $f = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $b = 3\,\mathrm{cm}$, $e = 5\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$, jak vyplývá z konstrukce (můžeme se o tom přesvědčit i měřením). Trojúhelník ABC jsme mohli sestrojit, protože pro délky jeho stran platí trojúhelníková nerovnost. Všimněte si, že kružnice k protne polopřímku AD' ve dvou bodech D a D_1, které vedou ke dvěma výsledkům úlohy. Oba čtyřúhelníky $ABCD$ i $ABCD_1$ jsou řešeními úlohy.

Úlohy

23. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno:

a) $a = 5{,}2\,\text{cm}$, $b = 6{,}4\,\text{cm}$, $\beta = 45°$

b) $a = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$, $e = 7\,\text{cm}$

24. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno:

a) $a = 6{,}2\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $e = 7{,}5\,\text{cm}$, $f = 5\,\text{cm}$

*b) $a = 7\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $c = 2\,\text{cm}$, $d = 4\,\text{cm}$

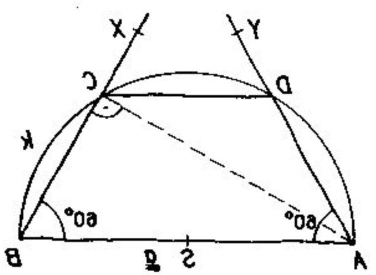
25. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno:

a) $a = 3{,}2\,\text{cm}$, $b = 2{,}6\,\text{cm}$, $d = 5{,}5\,\text{cm}$, $\alpha = 90°$, $\beta = 65°$

b) $a = 3{,}6\,\text{cm}$, $b = 4{,}3\,\text{cm}$, $c = 3{,}5\,\text{cm}$, $d = 2{,}4\,\text{cm}$, $\beta = 70°$

Příklad 6

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnou AB délky $a = 10\,\text{cm}$ a s úhlem DAB velikosti 60°, jestliže úhlopříčka AC svírá s ramenem BC pravý úhel.



Obr. 40

Řešení

Rozbor

Předpokládejme, že načrtnutý lichoběžník $ABCD$ je řešením úlohy (obr. 40). Protože lichoběžník je rovnoramenný, jsou úhly ABC a DAB shodné.

Neznáme body C a D. Pro neznámý bod C platí:

1. leží na Thaletově kružnici k s průměrem AB,
2. leží na rameni BX úhlu ABX velikosti 60°.

Pro neznámý bod D platí:

1. leží na kružnici k s průměrem AB (protože i úhel ADB je pravý)
2. leží na rameni AY úhlu BAY velikosti 60°.

   Popř. je možno nahradit 2 podmínkou:

2'. leží na přímce $p \parallel AB$, která prochází bodem C.)

Konstrukce

Postup konstrukce:

1. AB; $|AB| = 10\,\text{cm}$
2. S; $AS \cong SB$, $S \in AB$
3. k; $k(S; r = 5\,\text{cm})$
4. $\sphericalangle ABX$; $|\sphericalangle ABX| = 60°$
5. C; $C \in \mapsto BX \cap k$
6. $\sphericalangle BAY$; $|\sphericalangle BAY| = 60°$
7. D; $D \in \mapsto AY \cap k$
8. lichoběžník $ABCD$

Poznámka

Kdybychom použili podmínku 2' pro bod D, nahradili bychom kroky 6 a 7 v postupu konstrukce třeba takto:

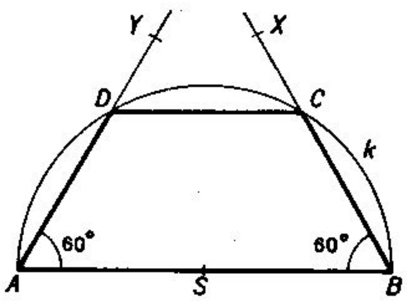
6'. p; $p \parallel AB$, $C \in p$

7'. D; $D \in p \cap k$

Provedení konstrukce (obr. 41):

Zkouška

Z konstrukce (můžeme se o tom přesvědčit měřením) vyplývá, že sestrojený lichoběžník má základnu AB délky 10 cm, úhly při základně AB mají velikost 60°, úhly ACB, BDA mají velikost 90°, takže jde



Obr. 41

o lichoběžník rovnoramenný s požadovanými vlastnostmi. Ve zvolené polorovině dostaneme jediné řešení.

Úlohy

26. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), je-li $|AB| = a = 6{,}8\,\text{cm}$, $\alpha = 60°$, úhlopříčka BD má délku $f = 7\,\text{cm}$ a $|CD| = c = 3\,\text{cm}$.

27. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), je-li $|AB| = 8\,\text{cm}$ $|CD| = 3\,\text{cm}$, výška $v = 3{,}5\,\text{cm}$ a úhlopříčka AC svírá se stranou AB úhel velikosti $30°$.

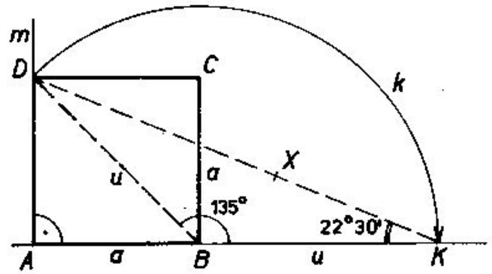
28. Sestrojte lichoběžník se základnami AB a CD, znáte-li délky $|AB| = 8{,}5\,\text{cm}$, $|CD| = 3{,}5\,\text{cm}$, $v = 3{,}5\,\text{cm}$ a velikost úhlu $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

* **29.** Sestrojte pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s pravým úhlem při vrcholu A, pro jehož strany platí $|AB| = 6\,\text{cm}$, $|BC| = 5\,\text{cm}$ a $|AD| = 4{,}5\,\text{cm}$.
   a) Proveďte rozbor, zapište postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.
   b) Pro jakou délku strany BC by měla úloha jediné řešení a jaký by to byl čtyřúhelník?

* **30.** V lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) platí: $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|AD| = 4\,\text{cm}$, $|\sphericalangle DAB| = 60°$. Sestrojte tento lichoběžník, je-li dále dáno
   a) $|BC| = 3\,\text{cm}$;
   b) $|BC| = 3{,}7\,\text{cm}$.
   V obou případech určete počet řešení.

* **Příklad 7**

Sestrojte čtverec, je-li dán součet délky jeho strany a délky úhlopříčky $a + u = 12\,\text{cm}$.



Obr. 42

Řešení

Rozbor

Na obr. 42 je znázorněn čtverec, o němž předpokládáme, že je řešením úlohy. Úsečku AK dané délky $a + u$ dostaneme tak, že sestrojíme kružnici $k(B; u)$; ta protne polopřímku AB v bodě K, přičemž vznikne rovnoramenný trojúhelník KDB. Vyjdeme-li při konstrukci z úsečky AK dané délky $a + u = 12\,\text{cm}$, hledáme tři neznámé body D, B, C. Vrchol D leží na kolmici vedené vrcholem A k přímce AK a na rameni KX úhlu AKX. Velikost úhlu $|\sphericalangle AKX| = 22°30'$ je velikostí úhlu při základně rovnoramenného trojúhelníku KDB. Úsečka AD je pak stranou hledaného čtverce.

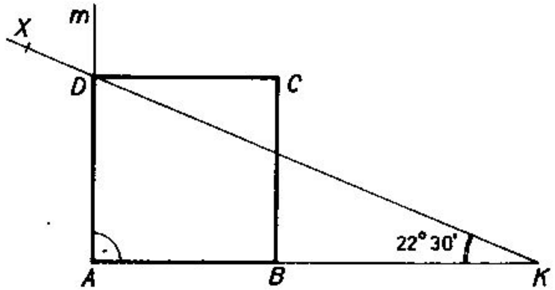
Konstrukce

Postup konstrukce:

1. AK; $|AK| = 12\,\text{cm}$
2. m; $m \perp \leftrightarrow AK$, $A \in m$

3. $\sphericalangle AKX$; $|\sphericalangle AKX| = 22°30'$
4. D; $D \in \mapsto KX \cap m$
5. čtverec $ABCD$

Provedení konstrukce (obr. 43):



Obr. 43

Zkouška

Z konstrukce vyplývá, že pro sestrojený čtverec platí $a + u = 12\,\text{cm}$ (přesvědčíme se o tom např. měřením). Úloha má ve zvolené polorovině jediné řešení.

Úlohy

* **31.** Sestrojte čtverec je-li dáno $u - a = 1\,\text{cm}$.

* **32.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a+b+c = 14\,\text{cm}$, $v_c = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$.

33. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno:
a) $a = 4{,}5\,\text{cm}$, $d = 3{,}8\,\text{cm}$, $\alpha = 85°$, $\beta = 78°$, $\delta = 115°$
b) $b = 5{,}2\,\text{cm}$, $c = 4{,}2\,\text{cm}$, $\beta = 135°$, $\delta = 120°$, $\gamma = 52°$

34. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno:
a) $a = 4{,}2\,\text{cm}$, $e = 5{,}5\,\text{cm}$, $\beta = 82°$, $\gamma = 105°$, $\delta = 30°$
b) $e = 3{,}5\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$, $f = 5{,}8\,\text{cm}$, $\gamma = 95°$, $\delta = 112°$

35. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno:
a) $a = 2{,}4\,\text{cm}$, $b = 4{,}8\,\text{cm}$, $\beta = 74°$
b) $a = 5{,}8\,\text{cm}$, $b = 3{,}6\,\text{cm}$, $e = 4{,}5\,\text{cm}$
c) $b = 2{,}5\,\text{cm}$, $c = 4{,}7\,\text{cm}$, $\beta = 98°$,

36. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno:
a) $a = 4{,}6\,\text{cm}$, $\alpha = 64°$
b) $b = 5{,}4\,\text{cm}$, $\gamma = 120°$
c) $e = 5{,}2\,\text{cm}$, $f = 3{,}6\,\text{cm}$

37. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), je-li dáno:
a) $a = 7{,}3\,\text{cm}$, $b = 4{,}2\,\text{cm}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 105°$
b) $a = 8{,}8\,\text{cm}$, $v = 3{,}5\,\text{cm}$, $\gamma = 65°$, $\delta = 95°$
c) $b = 3{,}5\,\text{cm}$, $c = 3{,}2\,\text{cm}$, $\beta = 58°$, $e = 4{,}7\,\text{cm}$

38. Sestrojte deltoid $ABCD$, je-li dáno:
a) $a = 2{,}5\,\text{cm}$, $b = 3{,}5\,\text{cm}$, $\beta = 145°$,
b) $e = 10{,}2\,\text{cm}$, $\alpha = 120°$, $\gamma = 45°$
c) $a = 6\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $f = 7\,\text{cm}$
(Deltoid je každý konvexní čtyřúhelník, ve kterém každá strana má právě jednu ze sousedních stran stejné délky.)

39. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno:
a) $a = 8\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$, $d = 3\,\text{cm}$
b) $a = 8\,\text{cm}$, $v = 4\,\text{cm}$, $c = 3\,\text{cm}$, $d = 4\,\text{cm}$
c) $a = 8\,\text{cm}$, $\alpha \doteq 45°$, $\beta = 30°$, $c = 4\,\text{cm}$

40. Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; 4\,\text{cm})$, $k_2(S_2; 2\,\text{cm})$, $|S_1S_2| = 6{,}5\,\text{cm}$. Sestrojte kružnici $k_3(S_3;\ 3\,\text{cm})$ tak, aby se dotýkala obou kružnic.

41. Je dána kružnice $k(S;\ 2{,}5\,\text{cm})$ a bod M, pro který platí $|SM| = 5\,\text{cm}$. Sestrojte z bodu M tečny ke kružnici k.

42. Je dána kružnice $k(S;\ 3{,}1\,\text{cm})$ a přímka p, která je vnější přímkou kružnice k. Sestrojte tečny kružnice k rovnoběžné s přímkou p.

43. Sestrojte kružnice $k_1(S_1;\ 3\,\text{cm})$, $k_2(S_2;\ 4\,\text{cm})$, $|S_1S_2| = 6\,\text{cm}$. Kolik mají společných bodů? Zvolte vzdálenost $|S_1S_2|$ tak, aby kružnice měly jenom jeden společný bod. Vyznačte tento bod a sestrojte společnou tečnu obou kružnic v tomto bodě.

44. K danému kruhovému oblouku LM sestrojte střed.
(Návod: Sestrojte osy úseček AB, BC, kde A, B, C jsou libovolné body daného oblouku.)

45. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno:
a) $a = 6{,}2\,\text{cm}$, $b = 4{,}3\,\text{cm}$, $\alpha = 70°$

b) $a = 4{,}5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $\beta = 100°$

46. Sestrojte pomocí pravítka a kružítka úhly o velikostech 60°, 30°, 15°, 45°, 22°30′, 105°, 120°.

47. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno:

a) $a = 6{,}5\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $t_a = 4{,}6\,\text{cm}$

b) $a = 6{,}5\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $t_b = 7{,}2\,\text{cm}$

* **48.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 5\,\text{cm}$, $r = 4\,\text{cm}$, $b = 3{,}5\,\text{cm}$ (r je poloměr opsané kružnice).

49. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC ($\gamma = 90°$), je-li

a) $c = 10\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$,

b) $c = 7{,}2\,\text{cm}$, $v_c = 2{,}5\,\text{cm}$.

50. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $a = 5{,}6\,\text{cm}$, $v_a = 3{,}8\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$

b) $a = 5{,}6\,\text{cm}$, $\alpha = 38°$, $b = 6\,\text{cm}$

c) $a = 4\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $v_c = 3{,}5\,\text{cm}$

51. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 8\,\text{cm}$, $v_a = 5{,}5\,\text{cm}$, $t_a = 6{,}2\,\text{cm}$.

52. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník, je-li dána:

a) délka ramene 4,5 cm a výška na základnu $v_z = 3{,}6\,\text{cm}$

*b) základna $z = 4\,\text{cm}$ a $r = 3\,\text{cm}$ (r je poloměr opsané kružnice)

53. Sestrojte kosočtverc $ABCD$, je-li dána velikost úhlu $\alpha = 38°$ a délka úhlopříčky AC, $|AC| = 7\,\text{cm}$.

54. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) $a = 5\,\text{cm}$, $e = 7{,}5\,\text{cm}$

b) $e = 7{,}5\,\text{cm}$, $f = 5{,}5\,\text{cm}$

55. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ ($a = 3\,\text{cm}$) a v jeho vrcholech sestrojte tečny ke kružnici jemu opsané.

56. Narýsujte rovnoběžky a, b a určete množinu všech středů kružnic, které se dotýkají obou přímek a, b.

57. Sestrojte kružnici opsanou a vepsanou trojúhelníku ABC ($a = 4\,\text{cm}$, $b = 5{,}2\,\text{cm}$, $c = 3{,}4\,\text{cm}$).

58. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, je-li dána délka ramene $b = 6\,\text{cm}$ a úhel při základně $\alpha = 35°$.

* **59.** Vrcholy trojúhelníku ABC leží na kružnici k tak, že ji dělí na tři díly v poměru 1 : 2 : 3. Sestrojte tento trojúhelník.

* **60.** Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, v němž výška k přeponě dělí přeponu na dva úseky $c_1 = 3{,}2\,\text{cm}$ a $c_2 = 4{,}1\,\text{cm}$.
(Návod: Sestrojte Thaletovu kružnici.)

61. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník, jestliže je dána střední příčka $p = 4\,\text{cm}$, výška $v = 5\,\text{cm}$ a rameno $r = 6\,\text{cm}$.

* **62.** Je dána kružnice k a její tečna t, která se dotýká kružnice k v bodě T. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník tak, aby kružnice k byla jeho vepsanou kružnicí a základna trojúhelníku ležela na dané tečně.

* **63.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $b = 5\,\text{cm}$, $v_b = 4{,}5\,\text{cm}$, $v_c = 3{,}5\,\text{cm}$.

64. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 4{,}2\,\text{cm}$, $v_a = 4\,\text{cm}$ a dále

a) $t_a = 4{,}5\,\text{cm}$,

b) $t_a = 4\,\text{cm}$,

c) $t_a = 3{,}8\,\text{cm}$.

* **65.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a + b = 10\,\text{cm}$, $c = 6{,}2\,\text{cm}$, $\gamma = 70°$.

* **66.** Sestrojte čtverec, je-li dán součet délky jeho strany a délky úhlopříčky 9 cm.

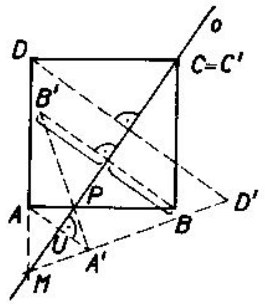
* **67.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), jestliže $a - c = 2\,\text{cm}$, $b = d = 4\,\text{cm}$, $r = 4\,\text{cm}$, kde r je poloměr kružnice opsané rovnoramennému lichoběžníku.

* **68.** Je dána kružnice k, na ní bod T a přímka p, která je vnější přímkou kružnice k. Sestrojte kružnici l, která se dotýká kružnice k v bodě T a přímky p.

13 SHODNOST. PODOBNOST

Příklad 1

Je dán čtverec $ABCD$ o straně $|AB|$ délky $a = 6\,\text{cm}$. Na straně AB sestrojte bod P tak, že $|AP| = 2\,\text{cm}$. Dále sestrojte přímku PC a označte ji o. Sestrojte obrazec souměrně sdružený ke čtverci $ABCD$ podle osy o. Ke kontrole přesnosti rýsování využijte samodružné body.



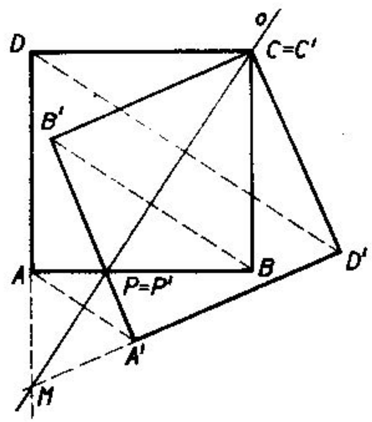
Obr. 44

Řešení

Rozbor

Na obrázku 44 je proveden náčrt dané situace a je v něm i naznačen postup při konstrukci útvaru souměrně sdruženého k danému čtverci $ABCD$. Poněvadž osa o prochází bodem C, je bod C samodružný ($C = C'$). Bodem A povedeme kolmici k ose o a její patu označíme U. Bod A' souměrně sdružený s bodem A sestrojíme v opačné polorovině na kolmici tak, že $UA' \cong UA$. Obdobně sestrojíme body souměrně sdružené s dalšími vrcholy čtverce. Ke kontrole využijeme samodružné body P a M.

Až bezpečně zvládnete provádění uvedených pomocných konstrukčních kroků, nebude nutné tyto jednotlivé kroky zapisovat. Pak provedete konstrukci hledaného útvaru přímo jako na obr. 45.



Obr. 45

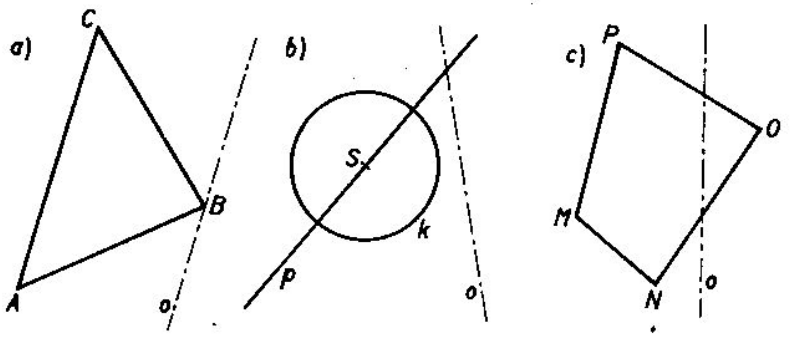
Konstrukce (obr. 45)

Úlohy

1. Uveďte základní vlastnosti osové souměrnosti:
   a) Co platí, je-li bod X vzorem a bod X' jeho obrazem v osové souměrnosti s osou o?
   b) Které body jsou samodružné?
   c) Jakou vzájemnou polohu mají přímka p a její obraz p'?
   d) Jakou vlastnost mají dva úhly AVB a $A'V'B'$ souměrně sdružené podle osy?

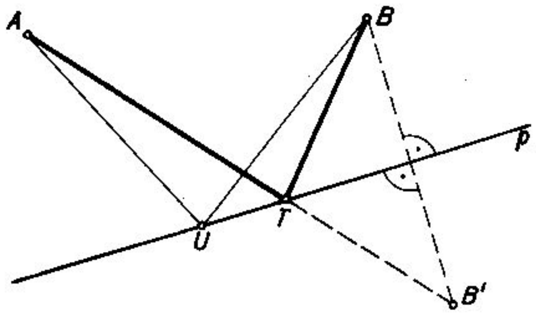
2. Sestrojte útvary souměrně sdružené podle daných os souměrnosti. Pokud je to možné, využijte samodružné body. Obr. 46 a), b), c).

* **3.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $|AB| = c = 5\,\text{cm}$, $|BC| = a = 3{,}5\,\text{cm}$ a úhel β má velikost $120°$. Sestrojenému trojúhelníku opište kružnici k a ve vrcholu C k ní sestrojte tečnu t. Dále sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC podle tečny t jako osy souměrnosti. (Ověřte si, zda vrcholy A', B', C' leží na kružnici k', která je souměrně sdružená s kružnicí k podle osy t.)



Obr. 46

4. Na obr. 47 je znázorněno řešení této úlohy: Přímka p představuje vedení vysokého napětí a body A, B dvě různé vesnice ležící v téže polorovině s hraniční přímkou p. Kde na přímce p je nutné zvolit polohu transformátoru T společného pro obě vesnice, aby součet jeho vzdáleností od vesnic byl co nejmenší? Vaším úkolem je pomocí osové souměrnosti s osou p, v níž bod B' je obrazem bodu B, zdůvodnit, proč grafický součet úseček $AT + TB$ je vždy menší než např. součet $AU + BU$.

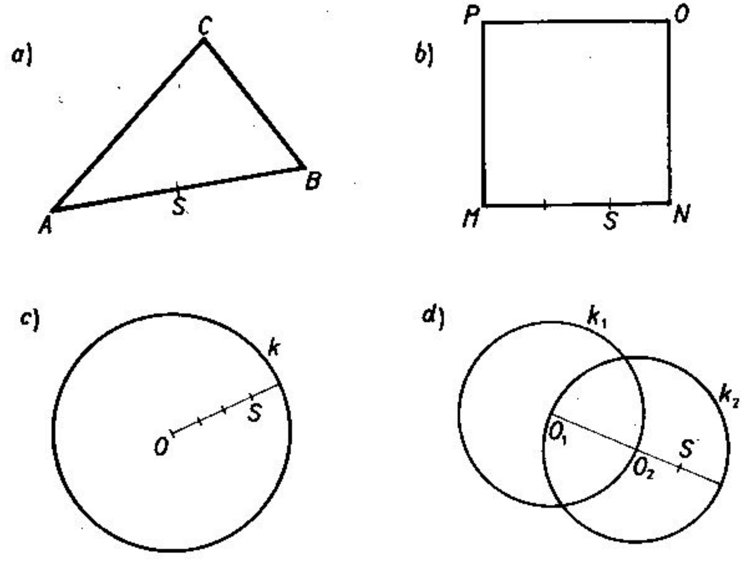


Obr. 47

5. Uveďte základní vlastnosti středové souměrnosti:

a) Co platí, je-li bod X vzorem a bod X' jeho obrazem ve středové souměrnosti se středem S?
b) Který bod je v tomto zobrazení samodružný?
c) Jaká je vzájemná poloha přímky p a jejího obrazu p'?
d) Popište vzájemnou polohu polopřímek ohraničujících daný úhel AVB a jeho obraz $A'V'B'$ ve středové souměrnosti.

6. Sestrojte útvar souměrně sdružený podle středu S s útvarem znázorněným na obr. 48 a), b), c), d).



Obr. 48

7. Uveďte vlastnosti posunutí, které je určeno dvojicí bodů M (vzor) a N (obraz), tj. orientovanou úsečkou MN:
a) Jaký význam má délka a směr posunutí pro libovolnou dvojici bodů vzor X a jeho obraz X'?
b) Existují v posunutí samodružné body?

c) Jaká je vzájemná poloha přímky p a jejího obrazu p'?
d) Popište vzájemnou polohu a vztah polopřímek ohraničujících daný úhel AVB a jeho obraz $A'V'B'$ v daném posunutí.

Příklad 2

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC tak, že jeho těžiště leží v počátku soustavy souřadnic, strana AB je rovnoběžná s osou x a vrchol C má souřadnice $[0;4]$. Určete souřadnice vrcholů obrazu trojúhelníku ABC

a) v osové souměrnosti s osou v ose x,
b) v osové souměrnosti s osou v ose y,
c) ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic,
d) v posunutí daném orientovanou úsečkou CC_4, kde $C[0;4]$, $C_4[a;4]$.

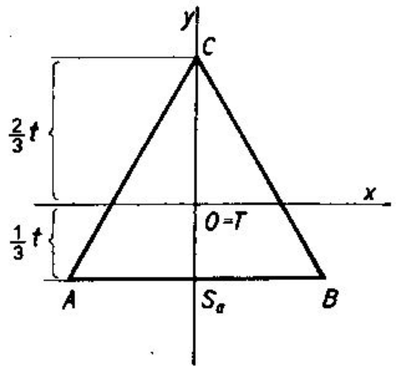
Řešení

Trojúhelník ABC sestrojíme a určíme souřadnice jeho vrcholů (obr. 49): Víme, že těžiště T leží na těžnici t ve vzdálenosti $\frac{2}{3}t$ od vrcholu C a jeho vzdálenost od středu strany AB je rovna $\frac{1}{3}t$. Dále víme, že vrchol C má souřadnice $[0;4]$. Souřadnice bodů S_a, A, B tedy jsou $S_a[0;-2]$, $A\left[-\frac{a}{2};-2\right]$, $B\left[\frac{a}{2};-2\right]$.

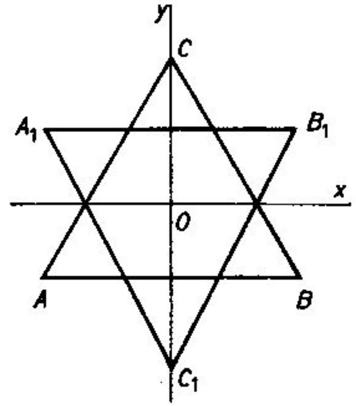
a) Vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$, který je obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti s osou v ose x (obr. 50), mají souřadnice $A_1\left[-\frac{a}{2};2\right]$, $B_1\left[\frac{a}{2};2\right]$, $C_1[0;-4]$.

b) Vrcholy trojúhelníku $A_2B_2C_2$, který je obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti s osou v ose y (obr. 51), mají souřadnice $A_2\left[\frac{a}{2};-2\right]$, $B_2\left[-\frac{a}{2};-2\right]$, $C_2[0;4]$.

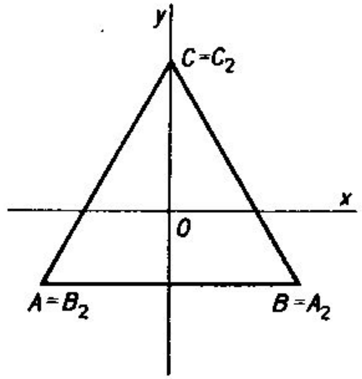
c) Vrcholy trojúhelníku $A_3B_3C_3$, který je obrazem trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic (obr. 52), mají souřadnice $A_3\left[\frac{a}{2};2\right]$, $B_3\left[-\frac{a}{2};2\right]$, $C_3[0;-4]$. (Trojúhelník $A_3B_3C_3$ je shodný s trojúhelníkem $A_1B_1C_1$.)



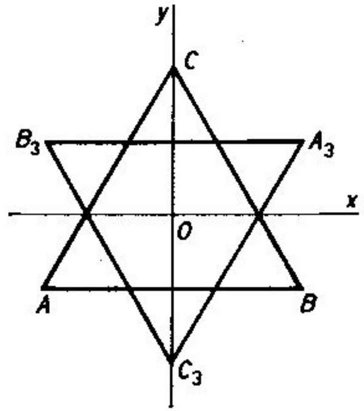
Obr. 49



Obr. 50

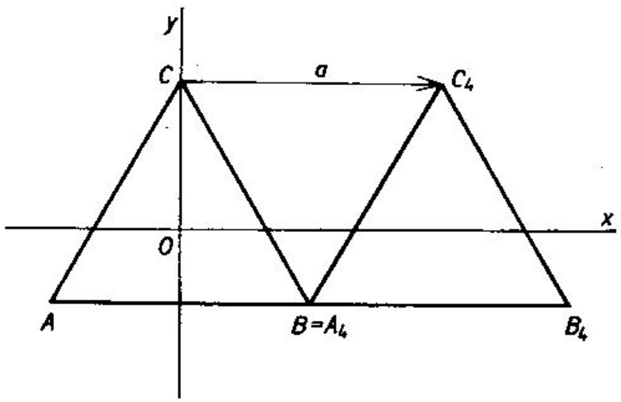


Obr. 51



Obr. 52

d) Vrcholy trojúhelníku $A_4B_4C_4$, který je obrazem trojúhelníku ABC v posunutí daném orientovanou úsečkou CC_4 (obr. 53) mají souřadnice $A_4\left[\frac{a}{2};-2\right]$, $B_4\left[\frac{3}{2}a;-2\right]$, $C_4[a;4]$.



Obr. 53

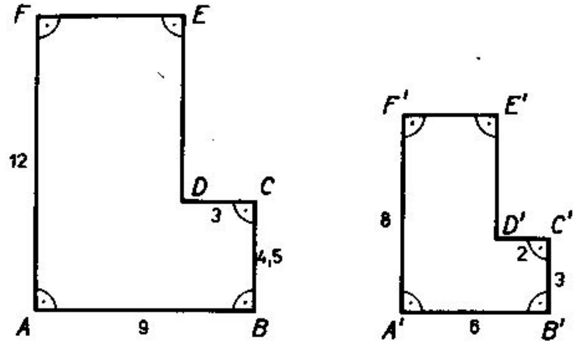
Úlohy

8. Je dán trojúhelník ABC s vrcholy $A[1;2]$, $B[3;2]$, $C[-1;5]$. Určete souřadnice jeho vrcholů v souměrnosti podle
   a) osy x,
   b) osy y,
   c) středu v počátku soustavy souřadnic.

9. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby průsečík jeho úhlopříček byl v počátku soustavy souřadnic, vrchol A měl souřadnice $[-2;0]$. Určete souřadnice vrcholů jeho obrazu
   a) ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic;
   b) v posunutí daném orientovanou úsečkou AA', kde $A[-2;0]$, $A'[0;2]$.

10. V rovině se soustavou souřadnic Oxy s počátkem $O[0,0]$ sestrojte k trojúhelníku ABC, kde $A[3,-3]$, $B[4,1]$, $C[5,-1]$,
   a) ve středové souměrnosti se středem O obraz $A_1B_1C_1$;
   b) v osové souměrnosti s osou y obraz $A_2B_2C_2$;
   c) v osové souměrnosti s osou x obraz $A_3B_3C_3$.

Ve všech třech případech určete souřadnice vrcholů sestrojených trojúhelníků.



Obr. 54

Příklad 3

Zjistěte, zda šestiúhelníky $ABCDEF$ a $A'B'C'D'E'F'$ znázorněné na obr. 54 jsou podobné.

Řešení

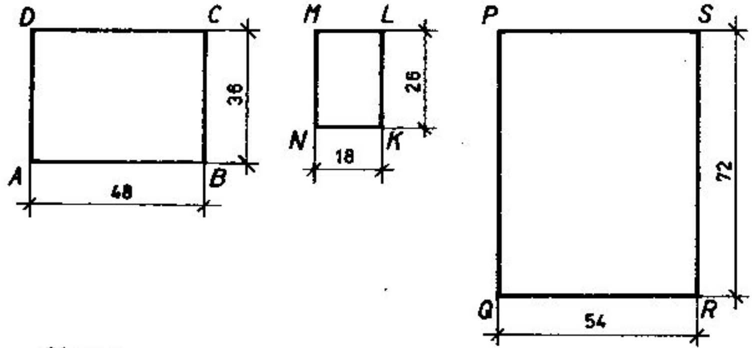
Definice podobnosti dvou geometrických útvarů vyžaduje, aby „poměry délek všech sobě odpovídajících úseček byly rovny témuž číslu $k > 0$ (poměru podobnosti)". Odpovídající úhly šestiúhelníků jsou shodné (např. $\sphericalangle FAB \cong \sphericalangle F'A'B'$ atd.). Vypočítáme poměry délek odpovídajících si stran určujících dané šestiúhelníky. Platí

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \qquad \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{2}{3} \qquad \text{atd.}$$

Výpočtem zjistíme, že všechny poměry délek sobě odpovídajících úseček jsou rovny témuž číslu $\frac{2}{3}$. Šestiúhelníky na obr. 54 jsou tedy podobné s poměrem podobnosti $\frac{2}{3}$. Protože $k < 1$, šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ je zmenšením šestiúhelníku $ABCDEF$.

Úlohy

11. Na obr. 55 jsou znázorněny tři obdélníky. Zjistěte, které z nich jsou podobné, a určete příslušný poměr podobnosti.



Obr. 55

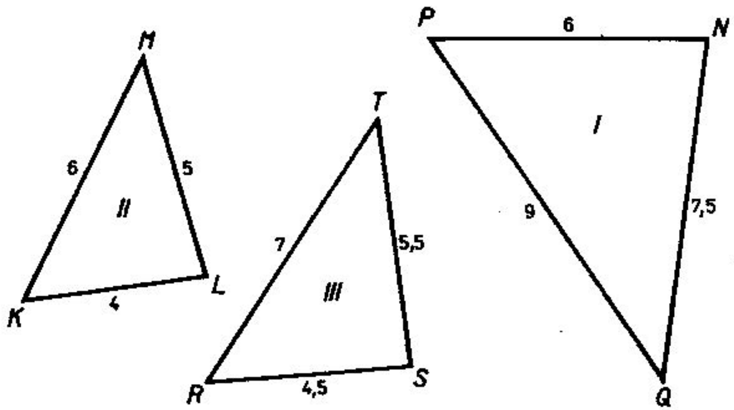
12. Zjistěte, zda jsou podobné obdélníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ ($a = |AB|$, $b = |BC|$), pro jejichž rozměry platí:

a) $a = 12\,\mathrm{cm}$, $b = 20\,\mathrm{cm}$, $a' = 36\,\mathrm{cm}$, $b' = 50\,\mathrm{cm}$

b) $a = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, $b = 4{,}2\,\mathrm{cm}$, $a' = 10{,}5\,\mathrm{cm}$, $b' = 12{,}6\,\mathrm{cm}$

c) $a = 88\,\mathrm{mm}$, $b = 124\,\mathrm{mm}$, $a' = 66\,\mathrm{mm}$, $b' = 93\,\mathrm{mm}$

13. Na obr. 56 jsou tři trojúhelníky I, II, III. Zjistěte, které dva jsou podobné.



Obr. 56

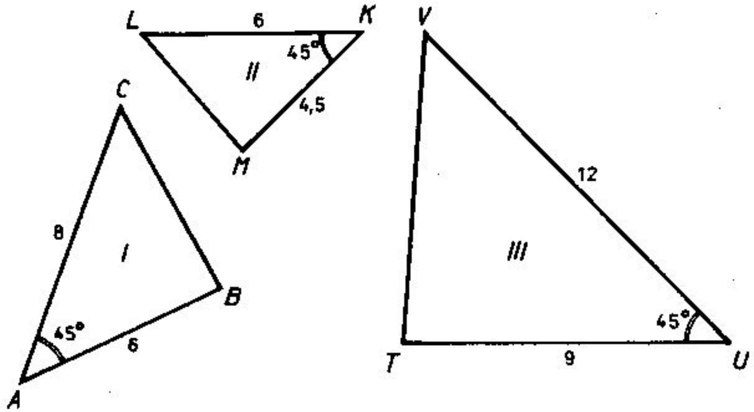
14. Zjistěte, zda jsou podobné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, jejichž strany mají délky:

a) $a = 16\,\mathrm{cm}$, $b = 18\,\mathrm{cm}$, $c = 25\,\mathrm{cm}$, $a' = 48\,\mathrm{cm}$, $b' = 54\,\mathrm{cm}$, $c' = 75\,\mathrm{cm}$

b) $a = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, $b = 4{,}8\,\mathrm{cm}$, $c = 5{,}4\,\mathrm{m}$, $a' = 1{,}75\,\mathrm{m}$, $b' = 2{,}4\,\mathrm{m}$, $c' = 2{,}8\,\mathrm{m}$

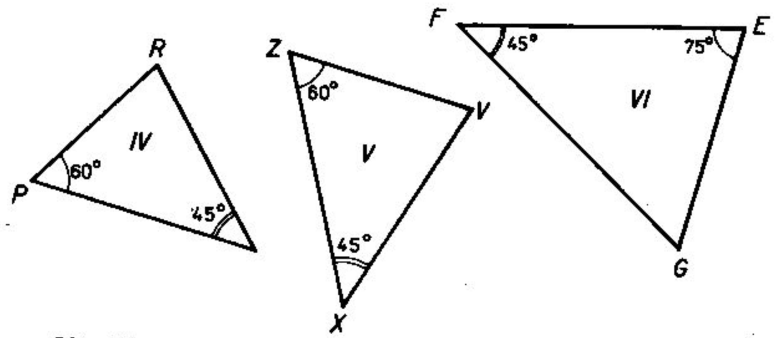
c) $a = 54\,\mathrm{mm}$, $b = 48\,\mathrm{mm}$, $c = 66\,\mathrm{mm}$, $a' = 36\,\mathrm{mm}$, $b' = 32\,\mathrm{mm}$, $c' = 44\,\mathrm{mm}$

15. Na obr. 57 jsou trojúhelníky I, II, a III. Zjistěte, které z nich jsou podobné a v kladném případě uveďte podle které věty o podobnosti trojúhelníků. Podobnost trojúhelníků zapište (dejte pozor na odpovídající si vrcholy).



Obr. 57

16. Na obr. 58 jsou trojúhelníky IV, V a VI. Zjistěte, které z nich jsou podobné a v kladném případě uveďte, podle které věty o podobnosti trojúhelníků. Podobnost trojúhelníků zapište (pozor na odpovídající si vrcholy).



Obr. 58

Příklad 4

Délky stran trojúhelníku XYZ jsou: $x = 6{,}4\,\mathrm{cm}$, $y = 5{,}6\,\mathrm{cm}$, $z = 6\,\mathrm{cm}$. Sestrojte trojúhelník $X'Y'Z'$ se stranou $X'Y'$ délky $z' = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, který je podobný trojúhelníku XYZ.

Řešení

Daný trojúhelník XYZ lze sestrojit podle věty *sss*, protože pro délky jeho stran platí trojúhelníková nerovnost:

$$|x - y| < z < x + y, \text{ tj. } |6{,}4\,\mathrm{cm} - 5{,}6\,\mathrm{cm}| < 6\,\mathrm{cm} < 6{,}4\,\mathrm{cm} + 5{,}6\,\mathrm{cm}.$$

Trojúhelník je podobný trojúhelníku $X'Y'Z'$, který hledáme, a proto pro délky odpovídajících si stran platí

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = k$$

nebo též

$$x' = k \cdot x, \quad y' = k \cdot y, \quad z' = k \cdot z.$$

Protože délky dvou odpovídajících si stran z' a z známe, vypočítáme poměr podobnosti k:

$$\frac{z'}{z} = \frac{4{,}5\,\mathrm{cm}}{6\,\mathrm{cm}} = \frac{3}{4} = k$$

Pomocí $k = \frac{3}{4}$ určíme délky hledaných stran x' a y' trojúhelníku $X'Y'Z'$:

$$x' = \frac{3}{4} \cdot 6{,}4\,\mathrm{cm}, \quad y' = \frac{3}{4} \cdot 5{,}6\,\mathrm{cm}$$

čili

$$x' = 4{,}8\,\mathrm{cm}, \qquad y' = 4{,}2\,\mathrm{cm}.$$

Protože pro délky úseček x', y', z' také platí trojúhelníková nerovnost, tj.

$$|4{,}8\,\mathrm{cm} - 4{,}2\,\mathrm{cm}| < 4{,}5\,\mathrm{cm} < 4{,}8\,\mathrm{cm} + 4{,}2\,\mathrm{cm},$$

sestrojíme trojúhelník $X'Y'Z'$ podle věty *sss*.

Úlohy

17. Je dán trojúhelník XYZ se stranami délek $x = 40\,\mathrm{mm}$, $y = 35\,\mathrm{mm}$, $z = 60\,\mathrm{mm}$. Sestrojte trojúhelník $X'Y'Z'$ podobný trojúhelníku XYZ, je-li ještě dáno:
a) $x' = 60\,\mathrm{mm}$;
b) $y' = 42\,\mathrm{mm}$;
c) poměr podobnosti $k = \frac{4}{5}$.

18. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné. Pro délky jejich stran platí: $|AB| = 10\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 6{,}5\,\mathrm{cm}$, $|CA| = 10\,\mathrm{cm}$, $|A'B'| = 8\,\mathrm{cm}$. Vypočítejte délky zbývajících stran.

* **19.** Poměr podobnosti dvou trojúhelníků je $\frac{2}{3}$. Trojúhelník ABC má strany délek $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 9\,\mathrm{cm}$, $c = 12\,\mathrm{cm}$. Dále je známa jen délka jedné strany druhého trojúhelníku $A'B'C'$, a to 8 cm. Určete nejprve dvě odpovídající si strany při poměru podobnosti $k = \frac{2}{3}$ a pak vypočítejte délky zbývajících stran.

20. Trojúhelník PQR je podobný trojúhelníku ABC, který má strany délek $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 6\,\mathrm{cm}$, $c = 7\,\mathrm{cm}$. Určete poměr podobnosti těchto trojúhelníků, znáte-li ještě:

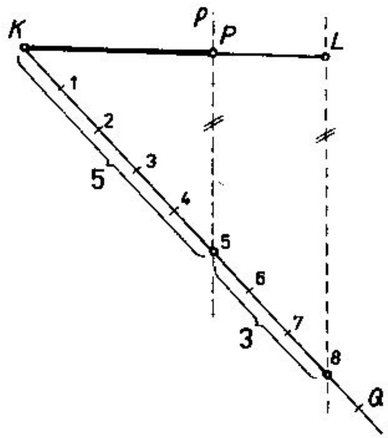
a) $|QR| = 7{,}5\,\text{cm}$;
b) $|PR| = 4{,}5\,\text{cm}$;
c) obvod trojúhelníku PQR má délku 12 cm.

Příklad 5

Úsečku KL délky 8,2 cm rozdělte v poměru 5 : 3.

Řešení

„Rozdělení dané úsečky v poměru $m : n$“ je určení **dvou** úseček, jejichž grafickým součtem je daná úsečka a jejichž délky jsou v poměru 5 : 3. Tyto délky bychom mohli vypočítat: délka první by byla rovna $\frac{5}{8}$ délky úsečky KL, délka druhé by pak byla rovna $\frac{3}{8}$ délky 8,2 cm. Je zřejmé, že pro konstrukční využití bychom nezískali vhodné údaje, neboť např. úsečku délky $\frac{3}{8} \cdot 8{,}2\,\text{cm}$, tj. 3,075 cm, lze těžko přesně nanést. Proto uvedeme vhodnější **konstrukci** (obr. 59):



Obr. 59

Nejprve narýsujeme úsečku KL délky 8,2 cm a jedním jejím krajním bodem, např. bodem K, povedeme polopřímku KQ (obr. 59). Pro sestrojení dvou úseček, jejichž délky jsou v poměru 5 : 3, potřebujeme danou úsečku rozdělit na $5+3 = 8$ shodných dílů. Další postup se opírá o podobnost trojúhelníků: Na polopřímku KQ naneseme postupně za sebou osmkrát libovolnou úsečku a dostaneme tak body 1, 2, 3, …, 8. Dále narýsujeme přímku $8L$ a bodem 5 povedeme přímku $p \parallel 8L$. Průsečík přímky p a úsečky KL je společný krajní bod P dvou hledaných úseček, jejichž délky jsou v poměru 5 : 3. Platí:

$$|KP| = \frac{5}{8}\,|KL|, \quad |PL| = \frac{3}{8}\,|KL|$$

Poznámka

Popsaná konstrukce se dá použít i při konstrukčním řešení úlohy „úsečku KL *změňte v poměru* 5 : 8“, tj. určete úsečku, jejíž délka se rovná $\frac{5}{8}$ úsečky KL. V našem případě dostaneme jako výsledek úsečku KP (na obr. 59 tlustě vytažena).

Úlohy

21. Rozdělte úsečku AB ($|AB| = 9\,\text{cm}$) v poměru 4 : 3.

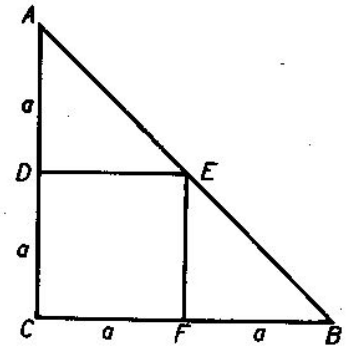
22. Úsečku MN délky 8,9 cm rozdělte na dvě úsečky v poměru:

a) $k = \frac{4}{5}$ b) $k = \frac{5}{4}$ c) $k = 1{,}3$

23. Sestrojte úsečky délek m, n, platí-li pro jejich délky:
a) $m : n = 3 : 4$, $m + n = 14\,\text{cm}$
b) $m : n = 4 : 5$, $m + n = 11{,}5\,\text{cm}$

24. Úsečky délek a, b, c změňte v daném poměru k:
a) $a = 6{,}2\,\text{cm}$, $b = 4{,}9\,\text{cm}$, $c = 7{,}3\,\text{cm}$, $k = \frac{3}{4}$
b) $a = 4{,}7\,\text{cm}$, $b = 5{,}9\,\text{cm}$, $c = 81\,\text{mm}$, $k = 1{,}4$

25. Narýsujte libovolný trojúhelník KLM a sestrojte trojúhelník ABC, pro který platí $\triangle KLM \sim \triangle ABC$ a současně platí $|KL| : |AB| = 2 : 3$.



Obr. 60

26. Na obrázku 60 je trojúhelník ABC a čtverec $CDEF$. Určete obvod trojúhelníku ABC, jestliže strana čtverce $a = 12$ cm.

27. Ze dvou podobných trojúhelníků má jeden obvod 100 cm, druhý má strany postupně o 8 cm, 14 cm, 18 cm větší než první. Vypočítejte délky jejich stran.

28. Strany trojúhelníku ABC mají délky 4 cm, 5 cm, 7 cm. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC, který má obvod 12 cm.

29. Narýsujte libovolný trojúhelník a libovolný čtyřúhelník. Trojúhelník zvětšete nebo zmenšete tak, aby se jeho obvod rovnal obvodu čtyřúhelníku.

30. Stín 2 metry vysoké tyče je 3 metry dlouhý. Jak vysoká je věž, je-li její stín ve stejnou dobu 28 m dlouhý?

31. Délky stran trojúhelníku jsou v poměru $2 : 5 : 4$. Určete délky stran jemu podobného trojúhelníku, jehož obvod je 55 cm.

32. Dva rovnoramenné trojúhelníky mají při vrcholu proti základně úhel stejné velikosti. Jeden z nich má rameno délky 17 cm a základnu 10 cm. Druhý má délku základny 8 cm. Určete délku jeho ramene.

33. Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$, pro který platí $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ a jeho obvod je 12 cm.

34. Dokažte, že dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují ve dvou stranách a výšce příslušné k jedné z nich.

35. Narýsujte čtverec $ABCD$, jestliže jeho vrchol A má souřadnice $[-2; -2]$ a průsečík úhlopříček je v počátku soustavy souřadnic. Určete souřadnice vrcholů B, C, D.

36. V soustavě souřadnic narýsujte rovnoběžník $ABCD$ tak, aby platilo $A[2; 2]$, $B[1; -3]$ a průsečík úhlopříček ležel ve středu soustavy souřadnic.

37. Sestrojte, pokud existuje, střed souměrnosti
a) úsečky, b) polopřímky, c) dvou různoběžek, d) trojúhelníku, e) rovnoběžníku.

38. Sestrojte úsečku délky $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$ (tzv. čtvrtou geometrickou úměrnou), jestliže platí
a) $a = 3$ cm, $b = 7$ cm, $c = 4{,}5$ cm,
b) $a = 8$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm.

* **39.** Sestrojte úsečku délky $x = \dfrac{a^2}{b}$, jestliže $a = 5$ cm, $b = 8$ cm.

40. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže platí $a : b = 1 : 2$, $\gamma = 35°$, $c = 6$ cm.
(Návod: Sestrojte nejdříve libovolný trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC.)

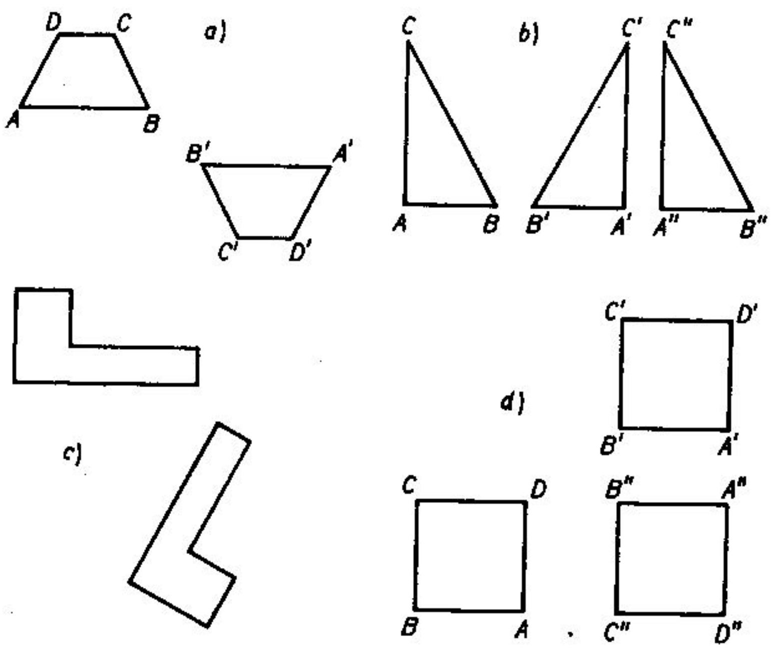
41. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC ($c = 4{,}2$ cm, $\alpha = 35°$, $b = 6$ cm) ve středové souměrnosti se středem $S = T$, kde T je těžiště trojúhelníku ABC.

42. Určete, ve kterém zobrazení jsou si přiřazeny obrazce na obr. 61.

* **43.** Dokažte, že každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou si podobné.

44. Vypočítejte skutečné rozměry pozemku, jestliže na mapě s měřítkem $1 : 25\,000$ má tvar obdélníku se stranami 15,4 mm a 4,5 mm.

45. Dva rovnoramenné trojúhelníky mají při vrcholu úhel stejné velikosti. Jeden z nich má základnu délky 10 cm a rameno délky 25 cm. Druhý má základnu délky 12 cm. Určete délku jeho ramene.



Obr. 61

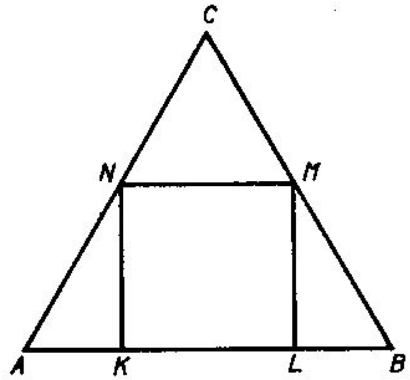
46. Rozhodněte, zda jsou podobné dva pravoúhlé trojúhelníky, jestliže první má jeden z vnitřních úhlů velikosti 40°a druhý má jeden z vnitřních úhlů velikosti a) 50°, b) 60°.

* **47.** Polopřímky AD a BC, na nichž leží ramena lichoběžníku $ABCD$, se protínají v bodě E. Vypočítejte délky stran trojúhelníku ABE, jestliže je dáno $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 16$ mm, $|CD| = 5$ cm, $|AD| = 15$ mm.

48. Pro dva trojúhelníky ABC a KLM platí $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle LKM$, $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle MLK$, $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4{,}5$ cm, $|KL| = 7{,}5$ cm, $|KM| = 6$ cm. Určete délky všech zbývajících stran obou trojúhelníků.

49. Délky stran trojúhelníku PQR jsou v poměru $PQ : QR : RP = 4 : 5 : 6$. Určete délky stran trojúhelníku $P'Q'R'$, pro který platí $\triangle P'Q'R' \sim \triangle PQR$ a $|P'Q'| = 0{,}8$ m.

* **50.** Do rovnostranného trojúhelníku ABC se stranou délky 5 cm je vepsán čtverec $KLMN$ (obr. 62). Vypočítejte délku strany čtverce $KLMN$.



Obr. 62

* **51.** Rozdělte úsečku PQ ($|PQ| = 12$ cm) na tři díly tak, aby z těchto dílů bylo možno sestrojit pravoúhlý trojúhelník s jedním vnitřním úhlem velikosti 30°.

52. Přímá cesta rovnoměrně stoupá na každé 3 metry o 65 centimetrů. O kolik metrů stoupne cesta ve vzdálenosti 279 metrů?

53. Rozdělte úsečku EF ($|EF| = 6{,}8$ cm) na osm shodných dílů.

54. Rozdělte úhel $\alpha = 50°$ na čtyři shodné úhly.

55. Sestrojte libovolný kosočtverec $ABCD$. V podobnosti s koeficientem $k = \dfrac{3}{4}$ sestrojte kosočtverec k němu podobný.

56. Dva podobné trojúhelníky mají obsahy $S_1 = 64\,\text{cm}^2$, $S_2 = 25\,\text{cm}^2$. Strana prvého z nich $a_1 = 4$ cm. Určete délku strany a_2 druhého trojúhelníku a výšky obou trojúhelníků příslušné k těmto stranám.

57. Určete výměru pozemku tvaru obdélníku, jestliže na mapě s měřítkem 1 : 50 000 má rozměry 3 cm a 4,2 cm.

58. Kolik os souměrnosti má
a) úsečka, b) přímka, c) úhel, d) čtverec, e) obdélník?

* **59.** Kolik os souměrnosti má
a) rovnostranný trojúhelník, b) rovnoramenný trojúhelník, c) kosočtverec, d) pravidelný šestiúhelník?

60. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jestliže platí $|AB| = 4{,}5\,\text{cm}$, $|DC| = 3{,}5\,\text{cm}$, $\alpha = 90°$, $|AD| = 3\,\text{cm}$. Sestrojte jeho obraz
a) v osové souměrnosti s osou AC,
b) ve středové souměrnosti se středem v bodě A,
c) v posunutí, ve kterém obrazem bodu A je bod C.

61. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ ($a = 2{,}5\,\text{cm}$) a jeho obraz
a) v posunutí, ve kterém je obrazem bodu A bod F,
b) ve středové souměrnosti se středem ve středu kružnice opsané danému šestiúhelníku.

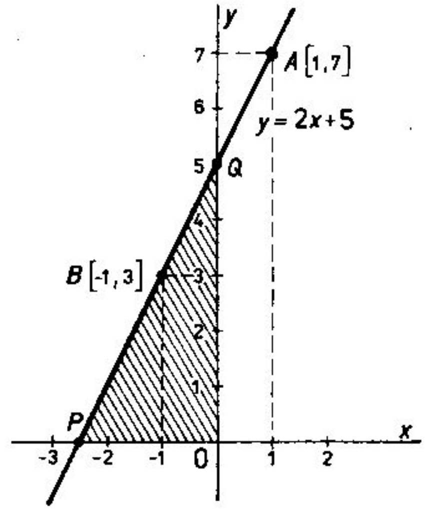
14 FUNKCE

□ **Příklad 1**

Určete obsah trojúhelníku POQ, kde P je průsečík grafu lineární funkce $y = 2x + 5$ s osou x, Q je průsečík grafu této funkce s osou y a O je počátek soustavy souřadnic.

Řešení

Grafem lineární funkce je přímka. Abychom ji mohli sestrojit určíme **dva** její body. Souřadnice x, y těchto bodů jsou řešením rovnice $y = 2x + 5$.



x	1	-1
$y=2x+5$	7	3

Obr. 63

Na obr. 63 je sestrojen graf funkce $y = 2x + 5$; trojúhelník POQ, jehož obsah máme vypočítat je vyšrafován.

Určíme souřadnice průsečíků grafu dané funkce s osami souřadnic.
Průsečík s osou y:
Všechny body ležící na ose y mají x-ovou souřadnici rovnu nule. Platí

tedy:

$$y = 2x + 5$$
$$y = 2 \cdot 0 + 5 \qquad Q[0; 5]$$
$$y = 5$$

Průsečík s osou x:
Všechny body ležící na ose x mají y-ovou souřadnici rovnu nule. Platí tedy:

$$y = 2x + 5$$
$$0 = 2x + 5 \qquad P[-2{,}5; 0]$$
$$-\frac{5}{2} = x$$

Trojúhelník POQ je pravoúhlý s odvěsnami PO, OQ. $|PO| = 2{,}5\,\text{cm}$; $|OQ| = 5\,\text{cm}$

$$S = \frac{2{,}5 \cdot 5}{2}\,\text{cm}^2$$
$$S = 6{,}25\,\text{cm}^2$$

Obsah trojúhelníku POQ je $6{,}25\,\text{cm}^2$.

□ **Příklad 2**

Řešte graficky soustavu rovnic:

$$2x - y = 2$$
$$2x + 3y - 6 = 0$$

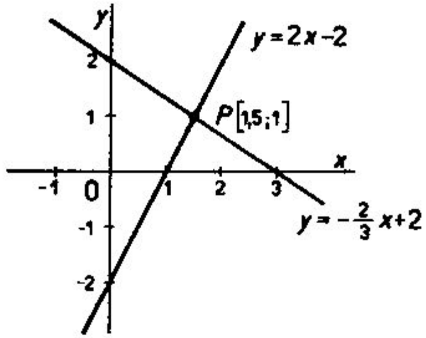
Řešení

Nejprve z každé rovnice vyjádříme y (uvedeme je na tvar $y = f(x)$).

$$2x - y = 2 \qquad\qquad 2x + 3y - 6 = 0$$
$$-y = -2x + 2 \qquad\qquad 3y = -2x + 6$$
$$y = 2x - 2 \qquad\qquad y = -\frac{2}{3}x + 2$$

x	0	1
$y=2x-2$	-2	0

x	0	3
$y=-\frac{2}{3}x+2$	2	0



Obr. 64

Do jednoho obrázku sestrojíme grafy lineárních funkcí $y = 2x - 2$, $y = -\frac{2}{3}x + 2$ a určíme souřadnice jejich společných bodů (pokud existují).

Pod $P[1{,}5; 1]$ na obr. 64 je jediný bod, který leží současně na grafech obou funkcí. Jeho souřadnice jsou společným řešením rovnic $y = 2x - 2$ a $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Řešením dané soustavy rovnic je tedy

$$x = 1{,}5, \qquad y = 1.$$

Úlohy

□ **1. Vyberte z daných funkcí funkce lineární:**
a) $y = x^4 - x^3 \qquad D = R$
b) $y = \frac{1}{x} \qquad D = R - \{0\}$
c) $y = x - x^2 \qquad D = R$
d) $y = 2x + 1 \qquad D = R$

☐ **2.** Sestrojte grafy lineárních funkcí:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = -2x + 1$
c) $y = 2x$ d) $2x + y = 1$
e) $2x - 3y = 6$ f) $3x + 4y + 2 = 0$

☐ **3.** Určete průsečíky grafů daných lineárních funkcí s osami x a y.

a) $y = -\frac{3}{2}x + 3$
b) $y = -1{,}4x - 3{,}5$
c) $y = 2{,}1x + 1{,}7$

☐ **4.** Určete, které z bodů $A[2;1]$, $B[-1;7]$, $C[-2;2]$, $D[-1;1]$ leží na grafech funkcí:

a) $y = x + 3$ b) $y = -4x + 3$
c) $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ d) $y = -2x + 5$

☐ **5.** Vyberte z daných funkcí $y = -x + 5$, $y = 2x$, $y = -\frac{3}{4}x$, $y = 5$, $y = 0$, $2x + 5y - 1 = 0$, $3x + y = 2$

a) funkce rostoucí,
b) funkce klesající.

☐ **6.** Do jednoho obrázku sestrojte grafy funkcí:

a) $y = x$, $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$
b) $y = -x$, $y = -2x$, $y = -\frac{1}{2}x$

☐ **7.** Zapište rovnici lineární funkce, jejíž graf prochází bodem $A[-1;1]$ a současně platí:
a) $a = 2$ b) $a = -2$ c) $a = 0$

☐ **8.** Určete průsečíky grafů funkcí:

a) $y = 2x - 1$
$y = -x + 2$

b) $y = \frac{1}{2}x + 2$
$y = x - 5$

☐ **9.** Z daných funkcí vyberte ty, jejichž grafem je přímka rovnoběžná s osou x (konstantní funkce):

a) $y = 3x + 2$ b) $y = -3{,}5$
c) $y = x^2 - x + 2$ d) $y = 0 \cdot x + 2$
e) $y = -2x$ f) $y = \sqrt{2}$

☐ **10.** Řešte graficky soustavy rovnic:

a) $x + y = 1$
$x - y = 1$

b) $3x - 5y = 11$
$6x - 10y = 22$

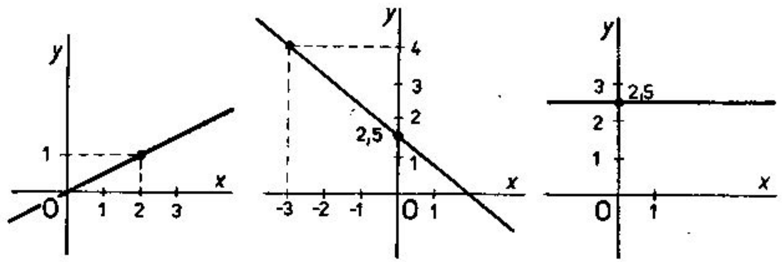
c) $x - y = 1$
$2x - 2y = 3$

☐ **11.** Řešte graficky soustavy rovnic:

a) $4x + 3y = 6$
$2x + y = 4$

b) $x + 15y = 33$
$3x + y = 27$

☐ **12.** Určete rovnice lineárních funkcí, jejichž grafy jsou na obr. 65.



Obr. 65

☐ **13.** Řešte graficky soustavy rovnic:

a) $x - y = 2$
$3x + y = 4$

b) $3x - 6y = 1$
$5x - y = 2$

c) $x + 2y = 3$
$3x + 6y = 1$

d) $2x - y = 4$
$x - \frac{1}{2}y = 2$

*☐ **14.** V rovnici $y = ax - 2$ určete a tak, aby graf funkce dané touto rovnicí procházel
a) bodem $[1;4]$,

b) bodem $[3; -2]$.

☐ **15.** Vyberte z daných funkcí ty, jejichž grafy jsou rovnoběžné. Svoji volbu ověřte sestrojením grafů.

a) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ b) $y = \frac{1}{2}x + 5$

c) $y = -2x + 1$ d) $y = -\frac{1}{2}x - 3$

☐ **16.** Z daných lineárních funkcí vyberte všechny klesající a sestrojte jejich grafy:

a) $y = -3x$ b) $y = 1 - x$
c) $y = 2x - 6$ d) $y = -5$
e) $y = -2 + x$ f) $y = -x - 2$

*☐ **17.** Je dána lineární funkce $y = 3x + 1$. Určete rovnici lineární funkce, jejíž graf je souměrný s grafem dané funkce v souměrnosti

a) podle osy y,
b) podle osy x,
c) podle grafu funkce $y = x$.

*☐ **18.** Určete rovnici lineární funkce, jejíž graf prochází body:

a) $A[0; 3]$, $B[-2; -3]$
b) $E[-1{,}5; 8]$, $F[-1; -1]$
c) $O[0; 0]$, $K[-2; 6]$

*☐ **19.** Pro které hodnoty proměnné x bude mít funkce $y = -\frac{1}{3}x + 3$

a) kladné hodnoty,
b) záporné hodnoty?

*☐ **20.** Rychlík jede průměrnou rychlostí 72 km za hodinu z místa A do místa B.

a) Sestrojte graf závislosti dráhy na čase.
b) Určete, jaká je vzdálenost míst A, B, jestliže do místa B dojel rychlík za 1 hodinu 25 minut.

☐ **21.** Cyklista projížděl při závodě trať dlouhou 210 km rychlostí 35 km za hodinu. Napište rovnici funkce vyjadřující závislost vzdálenosti y od cíle na čase x a sestrojte její graf.

☐ **22.** Nádrž na vodu má objem $80\,\mathrm{m}^3$. Otevřením přívodu přibývá $0{,}4\,\mathrm{m}^3$ za čtvrt hodiny. Napište rovnici funkce, která vyjadřuje závislost množství vody y v krychlových metrech na čase x v hodinách, jestliže při otevření přívodu nádrže

a) byla nádrž prázdná,
b) byla nádrž již naplněna 300 hl vody.

☐ **23.** Prázdná plechová nádržka na benzín má hmotnost 3,5 kg. Jeden litr benzínu má hmotnost 0,7 kg. Zapište rovnici funkce, která vyjadřuje závislost hmotnosti nádržky plněné benzínem na množství benzínu v litrech. Narýsujte graf této funkce.

*☐ **24.** Letadlo startovalo se zásobou 2 000 litrů benzínu. Na 100 km spotřebuje osminu tohoto množství. Zapište rovnici funkce, která vyjadřuje úbytek zásoby paliva na počtu kilometrů, které letadlo uletělo, a sestrojte její graf. (Graf sestrojte na milimetrový papír.)

*☐ **25.** Dva motocykly vyjely z téhož místa stejným směrem po téže silnici. Průměrná rychlost prvního motocyklu byla $45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a do cíle dojel za 4 hodiny. Druhý motocykl vyjel o hodinu později rychlostí $60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

a) Sestrojte grafy závislostí dráhy ujeté každým z motocyklů na čase.
b) Určete, kdy dostihne druhý motocykl první.

(Grafy sestrojte na milimetrový papír.)

*☐ **26.** V 6 h 45 min vyjel z přístavu parník průměrnou rychlostí $12\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. V 10 hodin vyjel za ním motorový člun, který plul průměrnou rychlostí $42\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. V kolik hodin dohoní člun parník? Řešte graficky.

(Grafy sestrojte na milimetrový papír.)

☐ **27.** Kamión jede po dálnici z Prahy do Bratislavy průměrnou rychlostí $72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. V okamžiku, kdy je vzdálen od Prahy 54 km, vyjíždí z Prahy osobní auto, které jede rovněž do Bratislavy a jehož průměrná rychlost je 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kdy a na kterém kilometru dohoní osobní auto kamión? Řešte graficky. (Grafy sestrojte na milimetrový papír.)

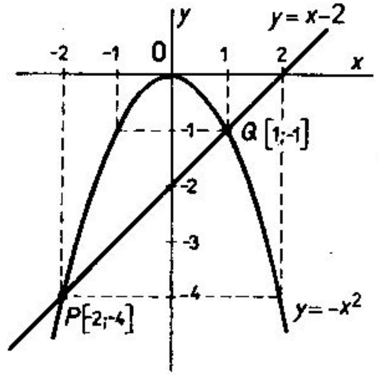
Příklad 3

Určete průsečíky grafů funkcí $y = -x^2$ a $y = x - 2$.

Řešení

Grafy obou funkcí sestrojíme do jednoho obrázku (obr. 66). Grafem kvadratické funkce $y = -x^2$ je parabola. Grafem lineární funkce $y = x - 2$ je přímka.

Z grafů určíme souřadnice průsečíků P a Q; $P[-2; -4]$, $Q[1; -1]$.



Obr. 66

☐ **Příklad 4**

Určete konstantu k v rovnici funkce $y = \frac{k}{x}$ $(x \neq 0)$, jestliže její graf prochází bodem $A[1; 2]$, a narýsujte její graf.

Řešení

Bod A leží na grafu funkce $y = \frac{k}{x}$. Dosadíme-li jeho souřadnice za proměnné x a y do dané rovnice, musí nastat rovnost.

Platí:

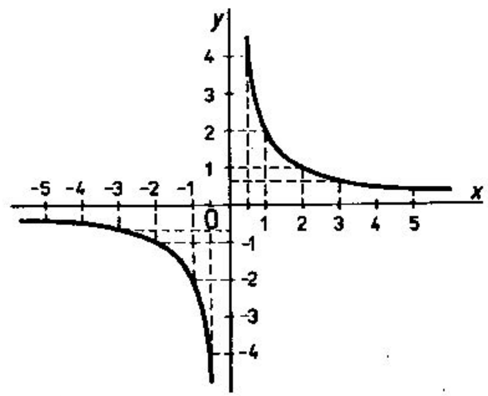
$$y = \frac{k}{x} \qquad A[1; 2]$$

$$2 = \frac{k}{1}$$

$$2 = k$$

x	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	-2	-3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$y = \frac{2}{x}$	2	1	$\frac{2}{3}$	4	6	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	-4	-6

Graf funkce $y = \frac{2}{x}$ je sestrojen na obr. 67.



Obr. 67

Úlohy

☐ **28.** Do jednoho obrázku sestrojte grafy funkcí:

a) $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$

b) $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$

☐ **29.** Určete průsečíky grafů funkcí:

a) $y = x^2$, $y = 5x - 6$ b) $y = -x^2$, $y = 2x - 3$ c) $y = x^2$, $y = 3$

☐ **30.** Určete neznámou souřadnici bodů $A[-1; y]$, $B[x; 1]$, které leží na grafu funkce $y = \frac{0{,}1}{x}$.

☐ **31.** Sestrojte grafy funkcí $y = \frac{1}{x}$ a $y = \frac{-1}{x}$ do jednoho obrázku. Podle které osy jsou souměrné?

☐ **32.** Které z bodů $A[1; 5]$, $B[-2; 20]$, $C[2; 8]$, $D[-6; -180]$ leží na grafu funkce $y = 5x^2$?

☐ **33.** Které z bodů $A[1; -1]$, $B\left[-1; \frac{3}{2}\right]$, $C\left[-1; -\frac{3}{2}\right]$, $D\left[-3; -\frac{1}{2}\right]$, leží na grafu funkce $y = \frac{1{,}5}{x}$?

☐ **34.** Určete konstantu a v rovnici kvadratické funkce $y = ax^2$, prochází-li graf této funkce bodem:

a) $[3; 18]$ b) $[-1; 1]$ c) $[-2; -8]$

*☐ **35.** Řešte graficky rovnice:

a) $2x^2 = 5$ b) $\frac{1}{3}x^2 = x + 4$ c) $-x^2 = -2x + 1$

(Návod: Sestrojte průsečíky grafů funkcí a) $y = 2x^2$ a $y = 5$, b) $y = \frac{1}{3}x^2$ a $y = x + 4$, c) $y = -x^2$ a $y = -2x + 1$.)

☐ **36.** Pro která x jsou dané funkce rostoucí?

a) $y = x^2$ b) $y = -x^2$ *c) $y = \frac{1}{2}x^2$ *d) $y = -2x^2$

*☐ **37.** Sestrojte graf funkce, který je obrazem grafu funkce $y = 3x^2$ v souměrnosti

a) podle osy x,

b) podle přímky, která je grafem funkce $y = x$.

☐ **38.** Sestrojte graf závislosti obsahu čtverce na délce jeho strany.

☐ **39.** Auto projede 100 m za t sekund. Za předpokladu, že se pohybuje rovnoměrně, vyjádřete závislost jeho rychlosti na čase a sestrojte graf této funkce.

☐ **40.** Graf funkce $y = \frac{k}{x}$ prochází bodem $[-2; 2]$. Určete konstantu k.

☐ **41.** Určete souřadnice průsečíků grafů funkcí:

a) $y = \frac{3}{x}$, $y = 3x$

b) $y = \frac{1}{x}$, $y = x + 1$

c) $y = \frac{-1}{x}$, $y = -2x$

*☐ **42.** Řešte graficky rovnice:

a) $\frac{1}{x} = x + 1$

b) $\frac{2}{x} = x - 1$

c) $\frac{3}{x} = \frac{1}{3}x$

☐ **43.** Na reostatu působí stálé napětí 6 V. Jak se mění proud $I = \frac{U}{R}$ v reostatu při plynulé změně odporu od 1 Ω do 24 Ω? Sestrojte graf. Z grafu přečtěte hodnoty odporu pro hodnoty proudu 5 A, 2 A, 1,2 A.

☐ **Příklad 5**

Vypočítejte objem kužele, jehož úhel při hlavním vrcholu osového řezu má velikost 60°a strana kužele má délku 15 cm (obr. 68).

Řešení

Objem kužele vypočítáme podle vzorce $V = \dfrac{S_p \cdot v}{3}$; $S_p = \pi r^2$

$\dfrac{r}{s} = \sin\dfrac{\beta}{2}$ $\qquad \dfrac{\beta}{2} = 60° : 2 = 30°$

$r = s \cdot \sin\dfrac{\beta}{2}$

$\dfrac{v}{s} = \sin\alpha$ $\qquad \alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$

$v = s \cdot \sin\alpha$

$r = 15 \cdot \sin 30°$

$r = 15 \cdot \dfrac{1}{2}$

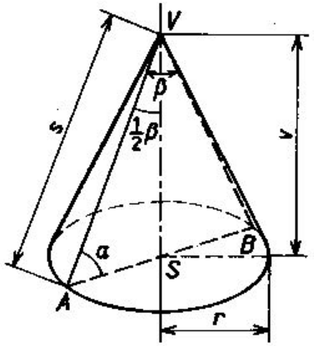
$r = 7{,}5$

$v = 15 \cdot \sin 60°$

$v \doteq 13$

$V = \dfrac{\pi \cdot 7{,}5^2}{3} \cdot 13 = 765$

$V \doteq 765\,\text{cm}^3$



Obr. 68

Výška kužele je přibližně 13 cm. Poloměr podstavy kužele je 7,5 cm. Objem kužele je přibližně 765 cm³.

Úlohy

☐ **44.** Sestrojte úhel α, jestliže $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

☐ **45.** Určete s přesností na dvě desetinná místa pomocí tabulek hodnoty $\sin\alpha$ pro následující velikosti úhlu α: 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°. Sestrojte graf funkce $y = \sin\alpha$ pro $0° \leqq \alpha \leqq 90°$.

☐ **46.** Určete výšku v_b trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $\alpha = 32°$, $c = 12\,\text{cm}$ b) $\gamma = 86°$, $a = 24\,\text{cm}$

c) $\alpha = 135°$, $c = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$ d) $\gamma = 150°$, $a = 16\dfrac{3}{5}\,\text{cm}$

*☐ **47.** Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$, je-li dáno: $\alpha = 60°$, $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|AD| = 4\,\text{cm}$.

☐ **48.** Odvoďte vzorec pro výpočet výšky rovnostranného trojúhelníku. Stranu trojúhelníku označte a. (Ověřte pro $a = 3\,\text{cm}$.)

☐ **49.** Vypočítejte obsah pravidelného šestiúhelníku ($a = 3\,\text{cm}$). Využijte výsledku předcházející úlohy.

*☐ **50.** Dokažte, že pro výpočet obsahu libovolného trojúhelníku platí vzorec $S = \dfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

☐ **51.** Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, jestliže platí:

a) $|AB| = 5{,}8\,\text{cm}$, $|AC| = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 60°$

b) $|BC| = 3\,\text{cm}$, $|AB| = 7{,}7\,\text{cm}$, $\beta = 45°$

c) $|AC| = 7\,\text{cm}$, $|CB| = 3{,}5\,\text{cm}$, $\gamma = 48°$

☐ **52.** Vypočítejte délky stran trojúhelníku ABC, jestliže platí: $\alpha = 45°$, $\gamma = 30°$, $v_c = 3\,\text{cm}$.

☐ **53.** Vypočítejte obvod pravoúhlého trojúhelníku ABC ($\gamma = 90°$), jestliže platí:

a) $\beta = 30°20'$, $b = 2{,}4\,\text{cm}$

b) $\alpha = 71°40'$, $c = 3{,}7\,\text{cm}$

☐ **54.** Vypočítejte obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC, je-li dána délka přepony $c = 10\,\text{cm}$ a velikost úhlu $\alpha = 30°$.

*☐ **55.** Vypočítejte objem jehlanu se čtvercovou základnou, jestliže délka jeho podstavné hrany $a = 5{,}5\,\text{cm}$ a velikost úhlu, který svírá boční hrana b s úhlopříčkou základny, je 45°.

☐ **56.** Vypočítejte velikost úhlů, délky stran a výšku k základně rovnoramenného trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $a = 14\,\text{cm}$, $c = 9\,\text{cm}$

b) $v = 11{,}2\,\text{cm}$, $\gamma = 54°$

☐ **57.** Žebřík dlouhý 3 m je opřen o zeď tak, že jeho pata je vzdálena od zdi 1,5 m. Jaký úhel svírá žebřík s vodorovnou rovinou?

*□ **58.** Navzájem kolmé síly F_1 a F_2 působí na těleso v jednom bodě. Jejich výsledná síla má velikost 150 N. Vypočítejte velikosti sil F_1 a F_2, jestliže síla F_1 svírá s výslednou silou F úhel o velikosti 24°.

*□ **59.** Jak vysoko vystoupí letadlo letící rychlostí $250\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ za 15 minut, jestliže stoupá pod úhlem 7°30′?

*□ **60.** Kvádr $ABCDEFGH$ má rozměry 0,4 dm, 0,6 dm, 0,8 dm. Vypočítejte délku jeho tělesové úhlopříčky a velikost úhlu, který svírá tělesová úhlopříčka s úhlopříčkou podstavy.

*□ **61.** Plášť rotačního kužele má obsah 248 cm^2. Poloměr podstavy daného kužele je $r = 8$ cm. Vypočítejte objem kužele.

*□ **62.** Vypočítejte obsah pravidelného osmiúhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem 10 cm.

*□ **63.** V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ známe délku delší základny $|AB| = 5{,}6$ cm, délku ramene $|AD| = 2{,}5$ cm a velikost úhlu BAD ($|\sphericalangle BAD| = 60°$). Určete jeho obsah a obvod.

*□ **64.** Vypočítejte objem a povrch pravidelného osmibokého jehlanu s podstavnou hranou délky $a = 3$ cm a výškou $v = 5{,}5$ cm.

*□ **65.** Porovnejte podílem obvod pravidelného dvanáctiúhelníku s délkou kružnice jemu opsané.

VÝSLEDKY ÚLOH

1 Racionální čísla

1. a) 27,92; b) 18,29; c) 1,92; d) −166,75 **2.** a) −10,86; b) 6,3; c) 100,08; d) 7,5. **3.** a) $-\frac{7}{24}$; b) $\frac{23}{60}$; c) $-\frac{5}{12}$; d) $-\frac{7}{60}$. **4.** a) $\frac{49}{288}$; b) $\frac{67}{96}$; c) $-\frac{29}{32}$. **5.** a) $2\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{9}$; c) −0,92; d) $3\frac{3}{8}$. **6.** a) $1\frac{2}{3}$; b) −1,1; c) 2,18; d) $-\frac{3}{5}$. **7.** a) 1,24; b) 0; c) 1,2; d) −0,2. **8.** a) $-8\frac{3}{4}$; b) $1\frac{7}{8}$; c) −32,4; d) 156,25. **9.** a) 17; b) −1,66; c) 7,15; d) −5,225. **10.** a) $-\frac{2}{21}$; b) $1\frac{7}{8}$; c) $3\frac{1}{9}$; d) $-\frac{5}{6}$. **11.** a) $4\frac{1}{6}$; b) 4; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{8}$. **12.** a) $-5\frac{1}{2}$; b) 45; c) $\frac{25}{82}$; d) $-\frac{14}{27}$. **13.** a) $4{,}5 \cdot 10^5$; b) $6{,}8592 \cdot 10^2$; c) $7{,}985 \cdot 10^5$; d) $3 \cdot 10^8$. **14.** a) 0,004 kg; $3{,}25 \cdot 10^5$ m; b) $1{,}2 \cdot 10^4$ g; 0,0375 m; c) $1{,}2 \cdot 10^4$ kg; 35 dm^3; d) 0,000820 m^2; $3{,}41 \cdot 10^4$ J. **15.** a) 0,75 m; 312,5 t; b) 27 km; 124 min; c) 0,648 m^2; 2,0845 kg; d) 654 kg; 82,5 m^3. **16.** a) $3{,}27 \cdot 10^2$ m; $4{,}5 \cdot 10^3$ s; $2{,}58 \cdot 10^4$ mV; b) $1{,}2 \cdot 10^2$ s; $7{,}32 \cdot 10^{10}$ Pa; $1 \cdot 10^2$ g; c) $6{,}54 \cdot 10^7$ W; $1{,}36 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$; $1{,}25 \cdot 10^4$ cm^3; d) $5{,}5 \cdot 10^2$ m^3; $2{,}73 \cdot 10^7$ J; $3{,}82 \cdot 10^4$ kg. **17.** a) $1 \cdot 10^{-2}$; b) $2{,}5 \cdot 10^{-1}$; c) $3{,}85 \cdot 10^{-3}$; d) $2{,}93 \cdot 10^{-7}$. **18.** a) $2{,}3 \cdot 10^{-2}$ kg; $4{,}5 \cdot 10^{-2}$ m^2; $2 \cdot 10^{-4}$ l; b) $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ m; $6{,}55 \cdot 10^{-2}$ m^3; $1{,}37 \cdot 10^{-2}$ V; c) $3{,}4 \cdot 10^{-2}$ km; $5 \cdot 10^{-1}$ g; $7{,}84 \cdot 10^{-5}$ m^3; d) $6{,}4 \cdot 10^{-5}$ kg; $4{,}8 \cdot 10^{-2}$ m; $5{,}9 \cdot 10^{-2}$ A. **19.** a) $12{,}7 \cdot 10^{-2}$ km; $10 \cdot 10^{-7}$ kg; $25{,}7 \cdot 10^{-5}$ m^2; b) $15 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $90 \cdot 10^2$ s; $37 \cdot 10^{-1}$ N; c) $32 \cdot 10^{-2}$ m; $50 \cdot 10^{-5}$ m^3; $74 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$; d) $15{,}7 \cdot 10^4$ kg; $20 \cdot 10^{-6}$ m; $30 \cdot 10^{-7}$ V. **20.** a) 60 m; 8,76 kg; b) 75 s;

$8{,}5\,m^3$; c) 124 l; 31,25 min. **21.** a) $5{,}1\cdot 10^4$ N; b) $3{,}42\cdot 10^3$ m; c) $6\cdot 10^4$ kg. **22.** $2{,}54\cdot 10^{-1}$ kg. **23.** $2{,}4\cdot 10^4$ Pa. **24.** a) -2; $-1{,}5$; b) $\frac{3}{5}$; -4; c) $-0{,}7$; -3; d) $2\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$. **25.** a) $\left(-0{,}02; \frac{1}{50}\right)$; $\left(4{,}5; -\frac{90}{20}\right)$; b) $\left(\frac{4}{25}; -0{,}16\right)$; $\left(\frac{7}{3}; -\frac{35}{15}\right)$; $\left(\frac{27}{12}; -2{,}25\right)$. **26.** a) $\left(3; -\frac{27}{9}\right)$; $\left(-\frac{48}{12}; \frac{16}{4}\right)$; b) $(24; -24)$; $\left(-\frac{18}{3}; 6\right)$. **27.** a) $\left(\frac{36}{12}; -\frac{72}{24}\right)$; $\left(5; -\frac{15}{3}\right)$; b) $\left(\frac{15}{3}; -\frac{30}{6}\right)$; $\left(9; -\frac{18}{2}\right)$; $(-17; 17)$. **28.** a) 0,07; b) 2,20; c) 4,43; d) 2,57. **29.** a) 169,3; b) 20,5; c) 1,3; d) 414,2. **30.** a) 3 027,56 m $\doteq$ 3 027,6 m; b) 7 054,75 g $\doteq$ 7 054,8 g; c) 156,25 min $\doteq$ 156,3 min; d) 36,012 7 m^2 $\doteq$ 36,0 m^2. **31.** a) 4,067 m $\doteq$ 4,07 m; b) 10 527,065 l $\doteq$ 10 527,07 l; c) 5,006 724 m^3 $\doteq$ 5,01 m^3; d) 2,028 t $\doteq$ 2,03 t. **32.** a) 75 345 kg $\doteq$ 75 300 kg; b) 6 872 s $\doteq$ 6 900 s; c) 20 455,75 cm^2 $\doteq$ 20 500 cm^2; d) 7 367 l $\doteq$ 7 400 l. **33.** 173 m. **34.** 714. **35.** 4,3 t. **36.** 64. **37.** 3 113,80 Kč. **38.** a) 5,3 m; b) 731,40 Kč. **39.** 42,80 Kč. **40.** 2 h 16 min. **41.** $0{,}4\,\frac{m}{s}$. **42.** 0,6 °C. **43.** Např.: 1,1 °C, -5 °C, $-5{,}7$ °C, $-3{,}5$ °C, $-2{,}9$ °C. **44.** Zmenšila se o 69,20 Kč. **45.** a) $-16{,}8$; b) 0; c) $-3\frac{3}{14}$. **46.** a) 15,6; b) 12; c) -6. **47.** a) $13\frac{1}{7}$; b) $\frac{11}{30}$.

2 Dělitelnost přirozených čísel

1. 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123. **2.** a) 0, 3, 6, 9; b) 1, 4, 7; c) 3, 6, 9; d) 2, 5, 8. **3.** 133, 140, 147. **4.** 120, 124, 128, 132. **5.** a) 0, 2, 4, 6, 8; b) 2, 6; c) nelze; d) 1, 3, 5, 7, 9. **6.** a) 3; b) 0, 9; c) 6; d) 6. **7.** a) 0, 6; b) nelze; c) 1, 4, 7; d) 2, 8. **8.** a) $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$; b) $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$; c) $2\cdot 2\cdot 5\cdot 23$; d) $2\cdot 2\cdot 2\cdot 29$. **9.** a) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96; b) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150; c) 1, 3, 7, 9, 21, 63; d) 1, 2, 4, 59, 118, 236. **10.** a) 1, 2; b) 1, 2, 4; c) 1; d) 1, 2, 3, 6, 9, 18. **11.** 60, 46 189. **12.** 40; 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. **13.** 52; 1, 2, 4, 13, 26, 52. **14.** 7, 8, 9. **15.** 1, 2, 4, 7, 8. **16.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. **17.** V 9 hodin 10 minut. **18.** Dvanáctý den. **19.** 48 m. **20.** 72 nebo 96. **21.** Pětkrát. **22.** Čtvrtá čárka se třetí, sedmá čárka s pátou, desátá čárka se sedmou. **23.** a) 4; b) 11; c) 14; d) 18. **24.** 6. **25.** 6,5 cm; 9. **26.** 15; v každém sáčku bylo 17 červených, 18 modrých a 30 zelených kuliček. **27.** $30\,\frac{km}{h}$. **28.** 0,9 ha. **29.** 6 obdélníků; $1\cdot 60$ dlaždic; $2\cdot 30$ dlaždic; $3\cdot 20$ dlaždic; $4\cdot 15$ dlaždic; $5\cdot 12$ dlaždic; $6\cdot 10$ dlaždic. **30.** 6, 24, 54, 96. **31.** 24. **32.** 6 řad po 12 děvčatech; 3 řady po 24 děvčatech; 4 řady po 18 děvčatech. **33.** 168. **34.** 225 cm. **35.** Po 1 cm, 2 cm, 4 cm. **36.** 18 řad; 324 sedadel. **37.** 468, 52, 364. **38.** 24 členů. **39.** 84 stran. **40.** 24 kolíků. **41.** 3 řezy. **42.** 38 sazenic. **43.** 1 m, 2 m, 3 m nebo 6 m. **44.** 2,4 m.

3 Procenta

1. a) 12,25 kg; b) 1 242 Kč; c) 0,6 l; d) 79,55 t. **2.** a) 1,69 km; b) 5,4 dm^2; c) 86,25 Kč; d) 33 dm^3. **3.** 250 000 ha. **4.** a) 130 %; b) 93 %; c) 0,3 %; d) 22 %. **5.** 86 %. **6.** Přibližně 35,3 %. **7.** a) 12 %; b) 6 %; c) 1,2 %; d) 0,8 %. **8.** a) 1 600 %; b) 8,5 %; c) 740 %; d) 42 %. **9.** a) 667; b) 1,08; c) 140,8; d) 268,4. **10.** a) 189; b) 151,2; c) 82,08; d) 1 561,06. **11.** a) 850; b) 160; c) 4,8; d) 450. **12.** 744 000 Kč. **13.** 6 m^3. **14.** 750. **15.** 340. **16.** 1 120. **17.** 185. **18.** 300. **19.** O 7,5 %. **20.** O 35 krav. **21.** O 22,5 %. **22.** 95 ha. **23.** 125 stromků. **24.** 5,7 kg. **25.** 92 %. **26.** Přibližně 12 570 km^2. **27.** 47,5 %, 25 %, 15 %, 12,5 %. **28.** 57 % mužů; 43 % žen. **29.** 4 000 Kč; 3 136 Kč. **30.** 600 Kč. **31.** 880 Kč. **32.** O 290,25 Kč. **33.** 33 500 Kč. **34.** O 247,50 Kč. **35.** 24,6 m. **36.** 11 ‰. **37.** 400 Kč. **38.** 2 244 Kč. **39.** 918 Kč; o 23,5 %. **40.** 400 ks; 1 324 ks. **41.** Přibližně 2 833 semen. **42.** Přibližně 21 g. **43.** 1,2 g. **44.** 510,84 t; o 32 %. **45.** 1 t. **46.** 10 500 m^2. **47.** 3,6 g. **48.** 68 kg.

49. 24 t. **50.** 12,5 %. **51.** 55,8 m, 27,6 m; o 14,44 %. **52.** 10 cm; o 48,8 %.

4 Poměr. Přímá a nepřímá úměrnost

1. Např. a) 0,15 : 0,35; b) (−9) : (−21); c) $\frac{3}{5} : \frac{7}{5}$. **2.** 2,5 : 5 = 0,1 : $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{2}$: 4 = 5 : 8; 7 : 2 = 3,5 : 1. **3.** 5 : 2,5; 4 : $\frac{5}{2}$; 2 : 7; 1 : 3,5; 8 : 5; $\frac{1}{5}$: 0,1. **4.** 9 : 5; 1 : 2; 4 : 5; 1 : 100. **5.** Např. 108 : 189; 400 : 700. **6.** Např. 35 a 15. **7.** a) 7,5; b) 20; c) nelze (daný poměr vede ke zmenšení); d) 500. **8.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{1}{2}$; d) nelze (daný poměr vede ke zvětšení). **9.** 189 mm a 126 mm. **10.** 875 m. **11.** 4 cm a 5 cm. **12.** 1 : 25 000. **13.** 21 a 35. **14.** 5 400 Kč, 6 000 Kč. **15.** 20 Kč, 28 Kč. **16.** 60 cm; 45 cm, 40 cm. **17.** Na $y = \frac{8}{x}$ body C a E; na $y = \frac{12}{x}$ body A a G; na $y = \frac{1}{x}$ body B a F. **19.** Přímá úměrnost c), d), f), nepřímá úměrnost a), b), e). **21.** $y = \frac{1}{3}x$. **22.** 4,8; 0,5; 4,8; 3. **23.** 1 520 Kč. **24.** Za 3 dny. **25.** 1 h 30 min. **26.** 350 hl. **27.** 836. **28.** 128 l. **29.** 4,7 km. **30.** $s = 330t$. **31.** 20,79 kg $\doteq$ 20,8 kg. **32.** 6,9 kg soli; 8 696 kg mořské vody. **33.** 115,4 q cukrovky; 1,95 q cukru. **34.** 15 cm; 9 cm. **35.** a) 3,5 krát; b) 336; c) 432. **36.** 2 100 g brambor; 7,5 vejce; 750 g mouky; 180 g másla; 60 g cukru; 90 g tvarohu; 2,25 kg švestek. **37.** 42,75 kg. **38.** 356,6 kW·h v denní sazbě; 1 724,6 kW·h v noční sazbě. **39.** 700 g; 500 g. **40.** $19\frac{1}{2}$ min. **41.** 242 cm. **42.** 576 Kč; 480 Kč; 864 Kč. **43.** 0,9. **44.** 10 kg. **45.** a) 32 : 142 = 16 : 71; b) 142 : 174 = 71 : 87. **46.** 960 g. **47.** 18 m. **48.** 133,3 g; 666,7 g. **49.** Za 4 dny. **50.** 0,16. **51.** 2 h 15 min.

52. 3 733,30 Kč; 1 866,70 Kč. **53.** $17\frac{1}{2}$ h. **54.** 1 260 Kč. **55.** 1. **56.** 2 550 l. **57.** 7 g. **58.** 100 g mědi; 400 g cínu. **60.** 4,8 m. **61.** 30 Kč; 70 Kč; 20 Kč. **62.** 3 : 4. **63.** 4 plechovky. **64.** 34,3 mm; 42,9 mm. **65.** 8 h. **66.** 8 lidí. **67.** 5,83 m. **68.** 35 kg. **69.** 12,6 l. **70.** $y = 2x$. **71.** $y = \frac{3}{x}$. **74.** B. **75.** A, B, C, F. **76.** 80 dní. **77.** 640 kg. **78.** 850 m^2. **79.** 83,7 km. **80.** 0,54 ha. **81.** a) 9 : 8; b) o 12,5 %. **82.** 30 km. **83.** 1 : 200 000. **84.** 42 km. **85.** 1 : 37 500. **86.** a) 4; b) 4; c) 2; d) $\frac{5}{3}$. **87.** a) $y = \frac{3}{2}x$; b) $y = -\frac{1}{3}x$; c) $y = \frac{5}{4}x$; d) $y = -\frac{2}{3}x$. **88.** a) $y = \frac{6}{x}$; b) $y = -\frac{2}{x}$; c) $y = -\frac{6}{x}$; d) $y = \frac{6}{x}$. **89.** 3,6; 7,2; 25,2. **90.** 433,30 Kč; 466,70 Kč. **91.** 35 zubů. **92.** 1 680 stromků. **93.** 384 litrů. **94.** 6,5 km; 5,5 km; 4 km. **95.** $s = 0{,}9$ cm; $r = 0{,}4$ cm; $R = 0{,}5$ cm. **96.** a) $|PQ| = |PR| = 300$ m; $|QR| = 150$ m, $|RS| = 175$ m; $|PS| = 225$ m; b) 0,4 ha. **97.** 45,6 t. **98.** 542,6 hl. **99.** a) 419,8 kg; b) 7 557 Kč. **100.** a) 15; b) 19.

5 Druhá mocnina a odmocnina. Pythagorova věta

1. 29 m^2. **2.** 37,5 cm^2. **3.** $S \doteq 37\,351$ cm^2. **4.** 16,848 m^2 $\doteq$ 17 m^2. **5.** 5,8 m. **6.** 5,17 m. **7.** 21,10 m. **8.** 14,7 cm. **9.** a) $a = 3,5$ cm; b) $c = 16$ cm; c) $a = 65$ mm. **10.** a) $u = 79,6$ mm; b) $b = 42,0$ cm; c) $a = 2,9$ m. **11.** 91 cm. **12.** $v = 1,8 \cdot \sqrt{3}$ cm $\doteq 3,1$ cm. **13.** $S = \sqrt{3}$ m^2 $\doteq 1,7$ m^2. **14.** 12 cm. **15.** 40 m. **16.** 1,5 cm nebo 10,5 cm. **17.** $r \doteq 11,3$ mm. **18.** a) 676; 2 304; 16 384; 133 225; b) 0,01; 0,16; 27,04; 43,56; c) 0,062 5; 0,176 4; 0,004 9; 0,008 1; d) 0,000 004; 0,000 025; 0,012 544; 0,054 756; e) $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{16}{81}$; $\frac{25}{49}$. **19.** a) 18,4; 1 840,4; 13,5; 1 346,9; b) 234 953,5; 26 345,5; 467 131,2; 55 019,3. **20.** a) 54,61;

637,56; 66,26; 1 348,36; b) 3 161,81; 746,71; 235,93; 7 337,46. **21.** a) $\frac{24}{25}$; b) $\frac{1}{10}$; c) 0,24; d) −0,09; e) −3; f) 8. **22.** a) $\frac{169}{289}$; b) $\frac{9}{11}$. **23.** a) 5 929; b) 5 929; c) −539; d) 4 225; e) 4 225; f) 4 225. **24.** a) 1; b) 0,04; c) 0,28; d) 1; e) −0,28; f) −1. **25.** a) $4\frac{4}{25}$; b) 1; c) $4\frac{4}{9}$; d) $-4\frac{4}{9}$; e) 9; f) $2\frac{16}{21}$. **26.** a) $\frac{1}{49}$; b) 0,28; c) $-\frac{37}{168}$. **27.** a) 17; 13; 65; 173; b) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{17}{23}$; $\frac{19}{27}$; c) 12; 18; 32; 4. **28.** a) 2,97; 9,39; 29,70; 93,91; b) 1,77; 5,60; 17,72; 56,04. **29.** a) 391; b) 28,60; c) $\frac{7}{3}$; d) $\frac{17}{12}$. **30.** a) −24; b) −12. **31.** a) 4,48; b) 20; c) 6; d) 1,5. **32.** a) 5; b) 1; c) 7; d) 7; e) 5; f) 1. **33.** 4 822,3 cm³. **34.** a) $S \doteq 75,34\,\mathrm{cm}^2$; b) $S \doteq 37,67\,\mathrm{cm}^2$. **35.** a) $S \doteq 31,35\,\mathrm{cm}^2$; b) $S \doteq 62,71\,\mathrm{cm}^2$. **36.** 93 m; zaokrouhlujeme nahoru vzhledem k praxi. **37.** a) 28 m; b) 28 m; 1,25. **38.** Trojúhelník je pravoúhlý v případech a), b), c), e), g), h). **39.** $S = 60\,\mathrm{cm}^2$. **40.** $e \doteq 13,9\,\mathrm{cm}$, $f = 8,0\,\mathrm{cm}$. **41.** $f \doteq 41,2\,\mathrm{cm}$. **42.** $a = 52\,\mathrm{cm}$. **43.** $e \doteq 277\,\mathrm{cm}$, $f = 160\,\mathrm{cm}$. **44.** $t_b \doteq 11,7\,\mathrm{cm}$. **45.** $b = 30\,\mathrm{cm}$; $t_b = 39\,\mathrm{cm}$. **46.** $t_c = 13\,\mathrm{cm}$. **47.** $S \doteq 412\,\mathrm{cm}^2$. **48.** $r = 62,5\,\mathrm{mm}$. **49.** $8\sqrt{3}\,\mathrm{cm} \doteq 13,9\,\mathrm{cm}$. **50.** 39 cm. **51.** 8,4 cm. **52.** 27 m². **53.** 7,8 m. **54.** 15 km. **55.** 2 h 19 min. **56.** 91 km. **57.** 130 N. **58.** 693 N. **59.** 19,7 cm.

6 Mocniny s přirozeným mocnitelem a mocnitelem nula

1. Platí jen a), d). **2.** a) 1; b) 0. **3.** a) $0,1^2$; b) $0,1^4$; c) $0,1^6$; d) $0,1^7$. **4.** a) $5 \cdot 10^2$ cm; $1 \cdot 10^4$ mm; $3,7 \cdot 10^5$ m; b) $2,3 \cdot 10^5\,\mathrm{cm}^2$; $6,1 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^2$; $8,2 \cdot 10^4$ ha; c) $3,6 \cdot 10^7\,\mathrm{cm}^3$; $5,6 \cdot 10^4\,\mathrm{cm}^3$; $2,5 \cdot 10\,\mathrm{m}^3$. **5.** a) $-21a^3b^8$; b) $a^3b^4c^5$; c) $12x^5y^4$; d) $-3x^3y^4$. **6.** a) $3x^4y$; b) $0,25y^2$; c) $-\frac{20x^3}{z^2}$; d) $-\frac{20y}{z^2}$. **7.** a) $64x^3y^9$; b) $81a^8b^4c^{12}$; c) $u^{2n}v^{3n}$; d) $\frac{-8m^6n^3}{27}$;

e) $\frac{-r^{10}s^{15}}{32t^5}$, $t \neq 0$; f) $27k^6$, $k \neq 0$. **8.** a) $144x^6y^8$; b) $8a^{21}b^{13}$; c) $64r^3s^6$, $r \neq 0$; d) $64u^2v^6$, $u \neq 0$. **9.** a) $1,5x^3(y-1)$, $x \neq 0$, $y \neq 1$; b) $\frac{(a-b)^2}{2a^2}$, $a \neq 0$, $a \neq b$. **10.** a) $16yz^6$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$; b) $4bc^5$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$; c) $\frac{z^6}{10x}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$; d) $-\frac{2a^2}{c}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. **11.** $2^{24} = 16\,777\,216$.

7 Úpravy algebraických výrazů

1. a) $(2+7) \cdot (45-40)$; 45; b) $(37-19):(4+5)$; 2. **2.** a), b), d). **3.** a) 6,3; b) 0,5; c) −0,5; d) 12. **4.** a) 2; b) 1; c) 3. **5.** a) $2x+5$; b) $2(x+5)$; c) $(m-n)^2$; d) m^2-n^2; e) $2r \cdot 7s - (2r-7s)$. **6.** a) $x-5$; b) $5-x$; c) $y+x$; d) $3m$; e) $4m+n$. **7.** $(2d-5)$ žáků. **8.** $\frac{5v}{6}$ Kč. **9.** $6 \cdot (a+k)$ lidí. **10.** $\frac{17b}{60}$ km. **11.** $\frac{4a}{3}$ km. **12.** $\frac{100m}{s}$ litrů. **13.** $\big(100-(3a+2b+3)\big)$ Kč. **14.** $\frac{2}{3}ab\,\mathrm{m}^2$. **15.** $(av - 0,0001bd)\,\mathrm{m}^2$. **16.** $c = \frac{j+s+3n+d}{a}$ Kč. **17.** $\left(k - \frac{kp}{100}\right)$ Kč. **18.** $\frac{6(k+16)}{a}$ výrobků. **19.** a) $\frac{nt}{n+1}$ hodin; b) $\frac{t}{n+1}$ hodin. **20.** $(2st - 2s - 1,5t)$ metrů. **21.** 0; −0,25; 1; 8; 33. **22.** a) $\frac{7}{3}$; $-2\frac{1}{3}$; $-4\frac{2}{3}$; $-\frac{7}{4}$; b) 15; −57; −45; −45; c) 11; 36; 15; 7,5. **23.** Nemá. **24.** Je řešením v případech a), b), d). **25.** a) $5,6m - 2,4n - 1$; b) $0,9x - \frac{4}{3}y + 11$. **26.** $-3m^3+2m^2+m+19$; −301. **27.** $-4t^3+t^2-25$; 11. **28.** $-8k-9$; 15. **29.** $3v^4 - 7v^3 + 5v^2 - 5v + 1$; 3. **30.** $z^3 - 2,1z^2 - 1,2z + 1,6$;

27,2. **31.** a); b); c). **32.** a) $3-c$; b) $-\frac{c+7}{2}$. **33.** $1{,}5a + 3{,}5$. **34.** -5; $-3{,}52$; $-1{,}75$; 0; 0,25; -1. **35.** 4,4; 1,4; 0; $-0{,}1$; 0,2; 2. **36.** 35; 20; 5; 2; 0; -1; 0; 5; 35. **37.** $\frac{25}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{75}$; $\frac{1}{75}$; $\frac{16}{27}$; 4,32; 12. **38.** a) $5a+b+1$; b) $7k+7c-2$; c) $0{,}3t-0{,}5r+3$; d) $3m^2+2am+5{,}5a^2$. **39.** a) $-6a+2c+6t$; b) $5{,}5p-15{,}9q+1{,}7$; c) $h^2-6{,}6h+0{,}49$; d) $5r^2-22r+4$. **40.** a) $13t-5$; b) $2x^2+6x+1$; c) x^2+6x+1; d) $-4{,}5m^2+5{,}2m$. **41.** $-2c-8d+13$. **42.** $2{,}4n+50-\frac{7}{6}$. **43.** $0{,}1k^2-2{,}5k+6{,}9$. **44.** a) $-2a^3+12a^2+a$; b) $-30a^4b+10a^3b^2-a^3b^3$. **45.** a) $-27a-36b$; b) 0; c) $18a+5b$; d) $44-70a$. **46.** a) $39x-64$; b) $-36x^2+51x+16$; c) $-27x^2+84x-64$; d) $27x^3-72x^2+36x+16$. **47.** a) $9x^2+24x+16$; b) $49x^2+70xy+25y^2$; c) $\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{4}+\frac{9}{16}$; d) $0{,}01x^4+0{,}1x^2+0{,}25$. **48.** a) $x^2-4xy+4y^2$; b) $25-20a+4a^2$; c) $9b^2+12b+4$; d) $\frac{9y^2}{4}-1{,}8y+0{,}36$; e) $4b^4-36b^2+81$; f) $16a^4+24a^2b^2+9b^4$. **49.** a) $(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$; b) $(2u-3v)^2=4u^2-12uv+9v^2$; c) $(3x-5y)^2=9x^2-30xy+25y^2$; d) $(7m-n^2)^2=49m^2-14mn^2+n^4$. **50.** Rovnají se a), c), d). **51.** a) $a^2-8a+16$; b) $-2a(y+a)$; c) 0; d) $-7(m^2-4m+4)$. **52.** a) $4y(2x-3y)$; b) $-3z(2z+3+4y)$; c) $7ab(7a-3b)$; d) $13t^2sv(5s^2-7tv+3t^2s)$. **53.** a) $2(3-v)$; b) $4(t-3)$; c) $(v-1)(u-1)$; d) $(6r-7)(t-2)$. **54.** a) $(a-b)(x-1)$; b) $(r-1)(r^2+1)$; c) $(z-3)(7-2b)$; d) $(5-2m)(t+5)$; e) $(z+y)(2n+k)$; f) $(c-d)(3a-2)$. **55.** a) $(7+4x)(7-4x)$; b) $(x^2y+1)(x^2y-1)$; c) $(3a+b+c)(3a+b-c)$; d) $(0{,}6-4b)(-4b)$. **56.** a) $(u-12)(u-12)$; b) $(3a+7b)(3a+7b)$; c) $3(h+5)(h+5)$; d) $5y^2(y-4)(y-4)$. **57.** a) $(r-7)(r+s)(r-s)$; b) $(x-1)(x+2)(x-2)$. **58.** a) $m^2k^2(2k-7m)(2k+7m)$; b) $(u+v)(u-v)(2r+3s)(2r-3s)$. **59.** a) $(3a+2b-6)(3a-2b+4)$; b) $(2c+4d-1)(2c-2d+1)$. **60.** a) $x\neq 0$; b) pro každé reálné x;

c) $x\neq -6$; d) $x\neq -\frac{5}{7}$; e) $x\neq 0$, $x\neq -9$; f) $x\neq 2{,}5$. **61.** a) $y\neq 3$, $y\neq -3$; b) $y\neq \frac{5}{3}$, $y\neq -\frac{5}{3}$; c) $y\neq 0$, $y\neq -\frac{1}{2}$; d) $y\neq 0$, $y\neq \frac{1}{2}$, $y\neq -\frac{1}{2}$; e) a f) pro všechna reálná y. **62.** a) $x\neq 0$, $y\neq 0$; b) $x\neq -y$; c) $x\neq -\frac{9}{5}y$; d) $x\neq \frac{2}{3}y$, $x\neq -\frac{2}{3}y$; e) $x\neq -5y$; f) $x\neq 3y$. **63.** $-1\frac{1}{3}$; $-2{,}5$; nemá smysl; 4,5; 2; 0. **64.** 0; $1\frac{1}{8}$; $6\frac{1}{4}$; $7\frac{1}{14}$; nemá smysl; 0. **65.** 7; 2; -1; nemá smysl; $-1\frac{3}{4}$; 2; 7. **66.** a) $x=0$; b) $x=3$; c) $x=-\frac{6}{5}$; d) $x=0$, $x=2$; e) $x=-4$; f) $x=4$. **67.** a) $\frac{x+y}{y-x}$; b) $\frac{6}{21x}$; c) $\frac{-15x^2}{-20xy}$; d) $\frac{-28x^2y}{12xy^2}$; e) $\frac{x^2+3x-10}{4x^2-8x}$; f) $\frac{2x^2+2xy}{y^2-x^2}$. **68.** a) $\frac{6}{39a}$; b) $\frac{8a}{14ab}$; c) $\frac{4a^2b-18ab}{6a^2b}$; d) $\frac{4a^2}{a^2+a}$. **69.** a) $\frac{5-2u}{2-u}$; b) $\frac{(u-2)^2}{u^2-4}$; c) $\frac{3u^2+9u}{u^2-9}$; d) $\frac{u^2-25}{u^2-10u+25}$. **70.** a) $a+3$; b) b^2-c^2; c) $3r^2+3rs$; d) $2mn+2m^2$. **71.** a) $3x^2$; b) $30x^2$; c) $8x^2y^3$; d) x^2-y^2; e) $3x-5$; f) $(x+3y)^2$. **72.** a) $5x$, $x\neq 0$, $y\neq 0$; b) $2xy$, $x\neq 0$, $y\neq 0$; c) $\frac{x-1}{x}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$; d) $\frac{1}{3}$, $x\neq 2$; e) $x+1$, $x\neq 1$; f) nedá se krátit, $x\neq -y$. **73.** a) $\frac{m+4}{m}$, $m\neq 0$, $m\neq 4$; b) -1, $n\neq m$; c) $-3n$, $n\neq 5$; d) $\frac{m+3n}{2}$, $m\neq 3n$; e) $m+3n$, $m\neq -3n$; f) $-2m-5n$, $n\neq \frac{2m}{5}$. **74.** a) $\frac{a}{3b}$, $b\neq 0$, $a\neq -\frac{3b}{2}$; b) 2; $a\neq 0$, $a\neq 7b$; c) $\frac{3(2a+b)}{a+2b}$, $a\neq 0$, $a\neq -2b$;

d) $\frac{3a+2b}{3a-2b}$, $a \neq \frac{2b}{3}$; e) $\frac{9a-1}{3}$, $a \neq -\frac{1}{9}$; f) $2(a+4)$, $a \neq 0$, $a \neq -4$. **75.** a) $\frac{x+4y}{y}$, $y \neq 0$, $x \neq -2y$; b) $\frac{1}{2}$, $x \neq y$. **76.** a) $9x + 15x^2$, $x \neq 0$; b) $-2y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; c) $3x$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; d) $2(6x-1)$, $x \neq -\frac{1}{6}$; e) $-2(8x+7)$, $x \neq \frac{7}{8}$; f) $\frac{x-y}{x+2y}$, $x \neq -2y$, $x \neq 2y$. **77.** a) u^2, $u \neq -1$, $u \neq 1$; b) $3v$, $v \neq -\frac{7}{5}$; c) $4r^2 - 49s^2$, $r \neq -\frac{7}{2}s$; d) p, $p \neq q$. **78.** a) 1, $a \neq 2b-1$, $a \neq 2b+1$; b) 1, $b \neq 3a-2$, $b \neq 3a+2$. **79.** a) $y-x$, $x \neq -y$; b) $2x$, $x \neq 0$; c) x^2+x+1, $x \neq 0$; d) $3-x$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; e) $x+1$, $x \neq 2y$, $x \neq -2y$; f) -3, $x \neq 3y$, $x \neq -3y$.

8 Řešení lineárních rovnic a jejich soustav

1. a) -3; b) -4; c) $-3{,}5$; d) $-1{,}5$; e) nemá řešení; f) řešením je libovolné reálné číslo. **2.** a) 0,5; b) 1,5; c) řešením je libovolné reálné číslo; d) nemá řešení. **3.** a) 3; b) -1; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{5}{4}$. **4.** a) 30; b) -12; c) 15; d) $\frac{2}{3}$. **5.** a) 21; b) -2; c) 3; d) 6. **6.** a) 5; b) 0; c) nemá řešení; d) řešením je libovolné reálné číslo. **7.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{3}{2}$; c) -9; d) 7. **8.** a) -1; b) 13; c) 0; d) -1. **9.** a) -1; b) $-\frac{1}{2}$; c) -15; d) $-\frac{1}{2}$. **10.** a) 0; b) -10; c) -4; d) 7,5. **11.** a) 3; b) $-\frac{1}{3}$; c) $\frac{7}{4}$; d) 1. **12.** a) nemá řešení; b) 5; c) řešením je libovolné reálné číslo různé od $\frac{3}{2}$; d) $-\frac{1}{3}$. **13.** a) 5; b) -1; c) -5; d) -30.

14. a) -13; b) $\frac{15}{4}$; c) 0,5; d) -7. **15.** a) 0; b) 3; c) nemá řešení; d) $\frac{17}{6}$. **16.** a) 2; b) 1,5; c) 4; d) nemá řešení. **17.** a) $-\frac{5}{2}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) řešením je libovolné reálné číslo různé od 4; d) -10. **18.** $[-2;7]$, $[-1;4]$, $[0;1]$, $[1;-2]$, $[2;-5]$, $[3;-8]$. **19.** $[1;1]$, $[2;-0{,}5]$, $[3;-2]$, $[4;-3{,}5]$. **20.** $[1;2{,}5]$, $[2;1{,}5]$, $[3;0{,}5]$. **21.** $[-1;-4]$, $[2;0{,}5]$, $[5;5]$. **22.** $[1;2]$, $[-1;-3]$, $[2;4{,}5]$. **23.** Např. $[0;-1{,}5]$, $[1;1]$, $[3;6]$. **24.** a) Např. $[0;0]$, $[1;2]$, $[3;6]$; b) např. $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $\left[1;\frac{5}{6}\right]$, $\left[3;\frac{3}{2}\right]$; c) např. $[0;5]$, $[2;0]$, $[4;-5]$; d) např. $\left[0;-\frac{13}{3}\right]$, $[1;-3]$, $\left[3;-\frac{1}{3}\right]$. **25.** a) Např. $\left[0;\frac{7}{6}\right]$, $\left[2;\frac{11}{6}\right]$, $\left[-3;\frac{1}{6}\right]$; b) např. $[0;-8]$, $[1;4]$, $[6;64]$. **26.** a) $[4;1]$, $[-2;-5]$, $[3;0]$, $[6;3]$; b) $[4;1]$, $[-2;4]$, $[6;0]$, $[0;3]$; c) $[4;-6]$, $[-2;3]$, $[0;0]$, $[-2;3]$; d) $[4;-3]$, $[-2;-12]$, $[6;0]$, $[8;3]$. **27.** $[1;13]$, $[3;8]$, $[5;3]$; první číslo v uspořádané dvojici určuje počet pětikorun, druhé počet dvoukorun. **28.** $[7;17]$, $[14;12]$, $[21;7]$, $[28;2]$; první číslo v uspořádané dvojici určuje počet metrů látky s cenou 50 Kč za 1 m, druhé určuje počet metrů látky s cenou 70 Kč za 1 m. **29.** $[6;13]$, $[12;8]$, $[18;3]$; první číslo uspořádané dvojice určuje počet pruhovaných košil, druhé číslo určuje počet bílých košil. **30.** a) $[5;-6]$; b) $[-1;-2]$; c) nekonečně mnoho řešení, každá uspořádaná dvojice $[a;4a+3]$; d) nemá řešení. **31.** a) $[5;2]$; b) $[3;4]$; c) $[2;1]$; d) $\left[-\frac{1}{9};\frac{7}{9}\right]$. **32.** a) $[4;3]$; b) $[3;4]$; c) $[-2;1]$; d) nekonečně mnoho řešení, každá uspořádaná dvojice $[r;\ 1{,}5r-3]$. **33.** a) $[5;-2]$; b) $[12;-24]$; c) $\left[\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right]$; d) $[-6;12]$. **34.** a) $[-2;-1]$; b) nemá řešení; c) nekonečně mnoho řešení, každá uspořádaná dvojice $\left[u;\frac{3-8u}{19}\right]$; d) $[2;-1]$. **35.** a) $[4;0]$; b) $[-0{,}5;-2]$; c) $[1;-1]$; d) $\left[-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right]$. **36.** a) nemá řešení; b) nemá řešení; c) $[-6;-2]$; d) $\left[\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right]$. **37.** a) $[-3;3]$; b) $\left[\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right]$.

9 Slovní úlohy, které lze řešit jednou lineární rovnicí s jednou neznámou nebo soustavou dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

1. 80 Kč, 150 Kč, 240 Kč. **2.** 25 t; 16,5 t; 28,5 t. **3.** Heřmánek 14 žáků, vlčí mák 12 žáků, jitrocel 10 žáků. **4.** a) $a = 36$ cm, $b = 39$ cm, $c = 15$ cm; b) je pravoúhlý. **5.** 800, 1 000, 1 150. **6.** 5 t, 6 t, 7,2 t. **7.** Jirka 400 Kč, Petr 460 Kč, Hanka 414 Kč. **8.** 200 součástek. **9.** Za 3 hodiny na 270. kilometru. **10.** 63 km. **11.** V 11 hodin 20 minut. **12.** 3 km; v 8 hodin 51 minut. **13.** 42 h. **14.** Za 24 minuty. **15.** Za 8 dní. **16.** 8 dní. **17.** 5 kg levnějšího a 15 kg dražšího čaje. **18.** 20 g 60%ního roztoku a 80 g 35%ního roztoku. **19.** 150 chlapců, 100 dívek. **20.** 375 g kovu hustoty $7{,}4\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ a 125 g kovu hustoty $8{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. **21.** 1 100 sazenic. **22.** 340 Kč, 290 Kč, 240 Kč, 190 Kč, 140 Kč. **23.** 347 m^2, 617 m^2. **24.** 552. **25.** −7, −2, 3, 8. **26.** 115, 117, 119, 121. **27.** 323 Kč, 188 Kč, 249 Kč, 225 Kč, 360 Kč. **28.** 39°, 47°, 94°. **29.** 5 400 Kč, 3 600 Kč, 2 400 Kč. **30.** 148 Kč, 106 Kč. **31.** 13,5 cm. **32.** 2 h 55 min. **33.** 156 Kč. **34.** 250 hl, 350 hl. **35.** 3 m^3, 15 m^3. **36.** 19 třílůžkových a 29 čtyřlůžkových. **37.** 14 konví po 25 l, 8 konví po 35 l. **38.** 37 dvacetikorunových a 13 padesátikorunových bankovek. **39.** 4 cm, 2 cm, 5 cm. **40.** 840 ha. **41.** Délka je 13 m, šířka je 7 m. **42.** 250 tun, 200 tun. **43.** 0,48 kg, 2 kg. **44.** 15 kg v ceně 170 Kč za 1 kg a 10 kg v ceně 210 Kč za 1 kg. **45.** 300 výrobků 1. druhu a 500 výrobků 2. druhu. **46.** 5 670 zaměstnanců, 1 980 zaměstnanců. **47.** $\frac{5}{9}$. **48.** 36 žáků. **49.** 13 litrů. **50.** 46 cm, 134 cm. **51.** 30 t ovsa, 105 t pšenice, 147 t žita. **52.** 14 kg, 50 kg. **53.** 18 km. **54.** 12 km. **55.** $51\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 204 km. **56.** $42\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $48\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, za 40 minut. **57.** $630\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $840\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **58.** $360\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $320\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

59. $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 90 km. **60.** $14\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **61.** Za 2 hodiny 15 minut. **62.** Za 5 hodin 15 minut. **63.** Ve městě 250 km, mimo město 550 km. **64.** 108 krav a 60 telat. **65.** Výška schodu je 19,2 cm, výška domu je 43,2 m. **66.** První za 9 hodin, druhé za 18 hodin. **67.** 24 součástek, 6 dní.

10 Obsahy a obvody obrazců

1. 30,56 cm^2, 34 cm. **2.** 3 140 cm^2. **3.** Čtvercový; o 5 500 m^2. **4.** 24 cm. **5.** 25 cm^2. **6.** 435 mm^2. **7.** 839 cm^2. **8.** Rovnoběžník má větší obsah. **9.** 21 cm^2, 22 cm. **10.** 563,2 m^2. **11.** 2,7 cm, 2,6 cm. **12.** 10,5 cm. **13.** 24 cm, 28 cm^2. **14.** 17,49 cm. **15.** 50,56 cm. **16.** 10,5 cm, 12 cm. **17.** 71,5 cm^2. **18.** 72 m^2. **19.** 50 cm^2, 28,28 cm. **20.** 200,64 cm. **21.** 249,4 cm^2. **22.** 10,75 cm. **23.** 14,42 cm, 21,63 cm. **24.** 6,7 cm, 4,1 cm, 3,9 cm. **25.** 6,92 cm. **26.** 44,85 cm. **27.** 61,9 m^2. **28.** 21,5 %. **29.** 117,75 m. **30.** 0,6 m, 0,8 m. **31.** 10 cm, 18 cm. **32.** 65°, 115°. **33.** 59,8 cm^2. **34.** 4 m, 6 m. **35.** 10,3 cm^2. **36.** 106,16 m. **37.** a) 23,4 cm^2, b) 45,8 cm^2. **38.** 2 cm. **39.** $\beta > \gamma > \alpha$. **40.** 21,2 cm, 26,9 cm^2. **41.** 144 cm^2, 400 cm^2, 9 : 25. **42.** 5 cm, 5 cm, 6 cm. **43.** 1,4 cm. **44.** 4,67. **45.** 7,1 cm^2. **46.** 108,5 kg. **47.** 318,5 krát. **48.** 2 řešení: 88 cm, 92 cm. **49.** 11 856 Kč. **50.** 57 cm^2. **51.** 17 cm. **52.** 21,2 cm^2. **53.** 2,5 cm, 3,54 cm. **54.** 7,14 cm. **55.** 9,24 cm. **56.** 8 cm. **57.** 2,83 m. **58.** 12,74 cm. **59.** 2 817 krát. **60.** 12,44 m^2. **61.** 13,88 cm. **62.** 26 cm, 30 cm^2. **63.** 295,3 cm^2. **64.** 12,56 cm, 2,56 cm^2. **65.** 1,21 g, šestiúhelníkový. **66.** 41 %. **67.** 41 cm^2, 0,5 dm, 3,47 m, 4,6 dm, 3,4 cm^2. **68.** 15,3 cm^2, 9 cm, 8 cm; 2 cm, 20 cm, 20 cm^2; 13 cm, 34 cm, 54 cm^2; 13 m, 44 m, 108 m^2. **69.** 40 %. **70.** 990 m^2, 44 %. **71.** 8,4 cm. **72.** 30 m, 50 m. **73.** 24 cm. **74.** 7,21 cm. **75.** 6,92 cm^2; 4 : 1. **76.** 1 : 3. **77.** Je; $v = 2{,}2\text{ cm} < 2{,}4\text{ cm} < 3\text{ cm}$. **78.** 106 m. **79.** 0,26 ha. **80.** 28,26 cm^2. **81.** 4 cm. **82.** $17{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **83.** 1 384 m^2. **84.** 78,5 cm^2. **85.** 1 : 2. **86.** 31,1 cm. **87.** 8,4 cm^2.

11 Povrchy a objemy těles

1. 139 mm. **2.** 208 cm^2, 192 cm^3, 10,77 cm. **3.** $a \cdot \sqrt{2}$. **4.** Zvětší se osmkrát. **5.** Přibližně 203,6 cm^2. **6.** 384 cm^2. **7.** 15 cm. **8.** 450 cm^2; přibližně 649,5 cm^3. **9.** Přibližně 564 kg. **10.** Nejvýše 948 osb. **11.** 33,6 litrů, 38,4 litrů, 44,4 litrů. **12.** 12,5 cm; povrch krychle k povrchu kvádru je v poměru 60 : 61. **13.** 13 hodin 20 minut. **14.** 20 %. **15.** 864 cm^3. **16.** 1,28 m. **17.** 2 070 cm^2. **18.** $S \doteq 256{,}2\,\mathrm{cm}^2$, $v \doteq 276{,}9\,\mathrm{cm}^3$. **19.** 1 416 cm^2. **20.** 18 720 cm^3. **21.** 300 cm^3. **22.** 372 cm^2, 324 cm^3. **23.** 277,2 cm^2. **24.** 20 800 m^3. **25.** 960 cm^2, 900 cm^3. **26.** 80 dm^2. **27.** 471 cm^2, 785 cm^3. **28.** 2,65 dm^2, 0,33 dm^3. **29.** $d \doteq 1{,}7\,\mathrm{m}$. **30.** Přibližně 50,2 litru. **31.** 100 litrů. **32.** d). **33.** 211 kg. **34.** $d = 12\,\mathrm{cm}$, $v = 10\,\mathrm{cm}$. **35.** 5 m. **36.** 12 m. **37.** Přibližně 415 cm^3. **38.** 109,9 kg. **39.** $314\,\frac{1}{s}$. **40.** 3,5 cm. **41.** 14 348 cm^3; 6 457,92 cm^2. **42.** 21,5 %. **43.** 222,86 dm^2, 192 dm^3. **44.** Přibližně 7,9 m^2. **45.** 15 %. **46.** 46,8 kg. **47.** 2 826 cm^2, 6 280 cm^3. **48.** 226,6 cm^3. **49.** Přibližně 18,8 litrů. **50.** Přibližně 0,15 kg. **51.** $33{,}\bar{3}$ cm. **52.** $V \doteq 19{,}9\,\mathrm{cm}^3$, $S \doteq 39{,}8\,\mathrm{cm}^2$. **53.** 9 cm^3. **54.** 9 cm.

12 Konstrukční úlohy

4. Dvě rovnoběžky s přímkou m ve vzdálenosti 17 mm. **5.** Kružnice se středem S a poloměrem 5 cm. **6.** Dvě soustředné kružnice se středem S, $r_1 = 3\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 7\,\mathrm{cm}$. **7.** Pro $2 > v \geqq 0$ dostaneme 4 body, pro $v = 2$ tři body, pro $8 > v > 2$ jen 2 body, pro $v = 8$ jeden bod, pro $v > 8$ žádný. **8.** a) Průnik vnějšku kruhu ohraničeného kružnicí n a vnitřkem kruhu ohraničeného kružnicí m. b) Průnik kruhů ohraničených kružnicemi m, n. c) Průnik vnějšků kruhů ohraničených kružnicemi m, n. **9.** Čtvrtkružnice se středem O, s poloměrem $\frac{1}{2}u$ (bez krajních bodů). **10.** Dvě řešení. **11.** Čtyři řešení. **12.** Tři řešení. **13.** a) Dvě řešení; b) $r_1 \doteq 1{,}7\,\mathrm{cm}$, $r_2 \doteq 5{,}2\,\mathrm{cm}$. **14.** Dvě řešení. **15.** a), b), c) vždy jedno řešení ve zvolené polorovině. **16.** a), b), c) vždy jedno řešení ve zvolené polorovině. **17.** Jediné řešení ve zvolené polorovině. **18.** Rozbor i postup konstrukce je ve všech třech případech týž, a) jedno řešení, b) jedno řešení, c) žádné řešení ve zvolené polorovině. **19.** Ve zvolené polorovině jedno řešení — druhé řešení (tupoúhlý trojúhelník) je v opačné polorovině. **20.** Dvě řešení ve zvolené polorovině. **21.** Dvě řešení ve zvolené polorovině. **22.** Dvě řešení (ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník). **23.** a), b) jedno řešení ve zvolené polorovině. **24.** a), b) jedno řešení ve zvolené polorovině. **25.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině dvě řešení. **26.** Jediné řešení ve zvolené polorovině. **27.** Jediné řešení ve zvolené polorovině. **28.** Jediné řešení ve zvolené polorovině. **29.** a) Ve zvolené polorovině dvě řešení. b) Pro $|BC| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ dostaneme jediné řešení — obdélník. **30.** Ve zvolené polorovině a) žádné, b) dvě řešení. **31.** Jediné řešení ve zvolené polorovině. **32.** Jediné řešení ve zvolené polorovině. **33.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **34.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **35.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. c) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **36.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. c) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **37.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. c) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **38.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. c) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **39.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. c) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **40.** Dvě řešení. **43.** Dva; 7 cm. **45.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **47.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **48.** Ve zvolené polorovině dvě řešení. **49.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině dvě řešení. **50.** a) Ve zvolené polorovině dvě řešení. b) Ve zvolené polorovině dvě řešení. c) Ve zvolené polorovině čtyři řešení. **51.** Ve zvolené polorovině dvě řešení. **52.** a) Ve zvolené polorovině jedno řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. **53.** Jedno řešení. **54.** a) Jedno řešení. b) Jedno řešení. **56.** Osa pásu. **58.** Ve zvolené polorovině jedno řešení. **60.** Ve zvolené polorovině jedno řešení. **61.** Ve zvolené polorovině čtyři řešení. **62.** Nekonečně mnoho řešení. **63.** Ve zvolené polorovině jedno řešení. **64.** a) Ve zvolené polorovině dvě řešení. b) Ve zvolené polorovině jedno řešení. c) Nemá řešení. **65.** Ve zvolené polorovině dvě řešení. **66.** Ve zvolené polorovině jedno řešení. **67.** Ve zvolené polorovině dvě řešení. **68.** Dvě řešení.

13 Shodnost. Podobnost

1. a) $|XX_o| = |X'X_o|$, $\leftrightarrow XX' \perp o$, kde $X_o \in \leftrightarrow XX' \cap o$; b) každý bod osy je samodružný; c) buď $p \parallel p'$ nebo $p \cap p'$ je bod osy; d) oba úhly jsou shodné. **3.** Jediné řešení. **4.** Řešení se opírá o známou zkušenost, že nejkratší spojnicí dvou bodů je úsečka. **5.** a) $|SX| = |SX'|$, body S, X, X' leží v přímce; b) bod S; c) $p \parallel p'$; d) $\mapsto V'A'$ nesouhlasně rovnoběžná s $\mapsto VA$; $\mapsto V'B'$ nesouhlasně rovnoběžná s $\mapsto VB$. **7.** a) $|XX'| = |MN|$, úsečky $\boldsymbol{XX'}$ a $\boldsymbol{MN}$ jsou souhlasně orientovány, $XX' \parallel MN$; b) neexistují; c) $p \parallel p'$; d) polopřímky VA a $V'A'$, jakož i polopřímky VB a $V'B'$ jsou souhlasně rovnoběžné.

8. a) $A'[1;-2]$, $B'[3;-2]$, $C'[-1;-5]$ b) $A'[-1;2]$, $B'[-3;2]$, $C'[1;5]$ c) $A'[-1;-2]$, $B'[-3;-2]$, $C'[1;-5]$ **9.** a) $A'[2;0]$, $B'[0;2]$, $C'[-2;0]$, $D'[0;-2]$ b) $A'[0;2]$, $B'[2;0]$, $C'[4;2]$, $D'[2;4]$

10. a) $A_1[-3;3]$, $B_1[-4;-1]$, $C_1[-5;-1]$ b) $A_2[-3;-3]$, $B_2[-4;1]$, $C_2[-5;-1]$ c) $A_3[3;3]$, $B_3[4;-1]$, $C_3[5;1]$

11. $\square RSPQ \sim \square ABCD$, $k = \frac{3}{2}$; jde o zvětšení obdélníku $ABCD$. **12.** a) Nejsou podobné; b) ano, $k = 3$; c) ano, $k = \frac{3}{4}$. **13.** $\triangle KLM \sim \triangle PNQ$, $k = \frac{2}{3}$ (zmenšení $\triangle PNQ$). **14.** a) Podobné, $k = 3$; b) nejsou podobné; c) podobné, $k = \frac{2}{3}$. **15.** $\triangle KML \sim \triangle ABC$, *sus*, $k = \frac{3}{4}$; $\triangle UTV \sim \triangle ABC$, *sus*, $k = \frac{3}{2}$; $\triangle UVT \sim \triangle KLM$, *sus*, $k = 2$. **16.** $\triangle PQR \sim \triangle ZXY$, *uu*; $\triangle PQR \sim \triangle GFE$, *uu*; $\triangle XYZ \sim \triangle FEG$, *uu*. **17.** a) $y' = 52{,}5\,\mathrm{cm}$, $z' = 90\,\mathrm{mm}$; b) $x' = 48\,\mathrm{mm}$, $z' = 72\,\mathrm{mm}$; c) $x' = 32\,\mathrm{mm}$, $y' = 28\,\mathrm{mm}$, $z' = 48\,\mathrm{mm}$. **18.** $|B'C'| = 5{,}2\,\mathrm{cm}$, $|C'A'| = 8\,\mathrm{cm}$. **19.** $c' = 8\,\mathrm{cm}$, $a' = 4\,\mathrm{cm}$, $b' = 6\,\mathrm{cm}$. **20.** a) $k = \frac{3}{2}$; b) $k = \frac{3}{4}$; c) $k = \frac{2}{3}$. **21.** až **24.** podle příkladu 5. **26.** 81,9 cm. **27.** 20 cm, 35 cm, 45 cm; 28 cm, 49 cm, 63 cm. **28.** 3 cm, 3,75 cm, 5,25 cm. **30.** 18,67 m. **31.** 10 cm, 20 cm, 25 cm. **32.** 13,6 cm. **35.** $B[2;-2]$, $C[2;2]$, $D[-2;2]$. **36.** $C[-2;-2]$, $D[-1;3]$. **37.** a) Ano; b) ne; c) ano; d) ne; e) ano. **42.** a) Středová souměrnost; b) osová souměrnost a osová souměrnost; c) osová souměrnost; d) posunutí a osová souměrnost. **44.** 385 m, 112,5 m. **45.** 30 cm. **46.** a) Ano; b) ne. **47.** $|AE| = 9\,\mathrm{cm}$, $|BE| = 9{,}6\,\mathrm{cm}$. **48.** $|AC| = 2{,}4\,\mathrm{cm}$, $|ML| = 11{,}25\,\mathrm{cm}$. **49.** $|Q'R'| = 1\,\mathrm{m}$, $|P'R'| = 1{,}2\,\mathrm{m}$. **50.** 2,32 cm. **51.** 2,54 cm; 5,07 cm; 4,39 cm. **52.** 60,45 m. **56.** 2,5 cm; 20 cm; 32 cm. **57.** 315 ha. **58.** a) 1; b) nekonečně mnoho; c) 1; d) 4; e) 2. **59.** a) 3; b) 1; c) 2; d) 6.

14 Funkce

1. d). **3.** a) $[2;0]$, $[0;3]$; b) $[-2{,}5;0]$, $[0;-3{,}5]$; c) $[-0{,}81;0]$, $[0;1{,}7]$. **4.** a) Žádný; b) B; c) žádný; d) A, B. **5.** a) $y = 2x$; b) $y = -x + 5$, $y = -\frac{3}{4}x$, $2x + 5y - 1 = 0$, $3x + y = 2$. **7.** a) $y = 2x + 3$, b) $y = -2x - 1$, c) $y = 1$. **8.** a) $[1;1]$; b) $[14;9]$. **9.** b), d), f). **10.** a) $x = 1$, $y = 0$; b) nekonečně mnoho řešení; c) nemá řešení. **11.** a) $x = 3$; $y = -2$; b) $x \doteq 8{,}5$; $y \doteq 1{,}6$. **12.** a) $y = \frac{1}{2}x$; b) $y = -\frac{1}{2}x + 2{,}5$; c) $y = 2{,}5$. **13.** a) $x = \frac{3}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; b) $x \doteq 0{,}4$; $y \doteq 0$; c) nemá řešení;

d) nekonečně mnoho řešení. **14.** a) $a = 6$; b) $a = 0$. **15.** a) a d). **16.** a), b), f). **17.** a) $y = -3x + 1$; b) $y = -3x - 1$; c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. **18.** a) $y = 3x + 3$; b) $y = -18x - 19$; c) $y = -3x$. **19.** a) $x < 9$; b) $x > 9$. **20.** b) 102 km. **21.** $y = -35x + 210$. **22.** a) $y = 1{,}6x$; b) $y = 1{,}6x + 30$. **23.** $y = 0{,}7x + 3{,}5$. **24.** $y = -2{,}5x + 2\,000$. **25.** b) Za 3 hodiny. **26.** V 11 h 18 min. **27.** Za 3 h, na 270. km. **29.** a) $[3; 9]$, $[2; 4]$; b) $[-3; -9]$, $[1; -1]$; c) $[1{,}7; 3]$, $[-1{,}7; 3]$. **30.** $A[-1; -0{,}1]$, $B[0{,}1; 1]$. **31.** x. **32.** A, B. **33.** C, D. **34.** a) 2; b) 1; c) -2. **35.** a) $x_1 = 1{,}6$; $x_2 = -1{,}6$; b) $x_1 = 5{,}3$; $x_2 = -2{,}3$; c) $x_1 = x_2 = 1$. **36.** a) $x > 0$; b) $x < 0$; c) $x > 0$; d) $x < 0$. **39.** $y = \frac{100}{t}$. **40.** -4. **41.** a) $[1; 3]$, $[-1; -3]$; b) $[-1{,}6; -0{,}6]$, $[0{,}6; 1{,}6]$; c) $[0{,}7; -1{,}4]$, $[-0{,}7; 1{,}4]$. **42.** a) $x_1 = -1{,}6$; $x_2 = 0{,}6$; b) $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; c) $x_1 = 3$; $x_2 = -3$. **43.** $y = \frac{6}{x}$, $1 \leqq x \leqq 24$; $1{,}2\,\Omega$; $3\,\Omega$; $5\,\Omega$. **45.** 0,17; 0,34; 0,50; 0,64; 0,77; 0,87; 0,94; 0,98. **46.** a) 6,36 cm; b) 23,94 cm; c) 4 cm; d) 8,3 cm. **47.** 20,76 cm^2. **48.** $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. **49.** 23,4 cm^2. **51.** a) 10,1 cm^2; b) 8,2 cm^2; c) 9,1 cm^2. **52.** $a = 3{,}11$ cm; $b = 4{,}24$ cm; $c = 2{,}20$ cm. **53.** a) 11,3 cm; b) 8,4 cm. **54.** 21,7 cm^2. **55.** 39,3 cm^3. **56.** a) $\alpha = \beta = 71°15'$; $\gamma \doteq 37°30'$; $a = b = 14$ cm; $v_c \doteq 13{,}3$ cm; b) $\alpha = \beta = 63°$; $a = b = 12{,}6$ cm; $c = 11{,}4$ cm. **57.** 60°. **58.** $F_1 = 137$ N; $F_2 = 61$ N. **59.** 8 158 m. **60.** 10,77 cm; 48°. **61.** 387,2 cm^3. **62.** 283 cm^2. **63.** 9,4 cm^2; 13,7 cm. **64.** 79,64 cm^3; 122,4 cm^2. **65.** $12 \cdot \sin 15° : \pi = 98 : 100$.

Zpracovali PaedDr. František Běloun, PhDr. Ivan Bušek,
PhDr. Vlastimil Macháček, PhDr. Jana Müllerová, CSc.,
PhDr. Květa Sovíková a RNDr. Václav Šůla

Lektorovali Mgr. Pavel Müller a RNDr. Karel Štencel

Doporučeno MŠMT ČR č.j. 20271/92-21 ze dne 3. srpna 1992.

Dotisk 7. vydání

ISBN 80-85849-63-1